Euler 関数の導来対数関数 L で完全数問題を眺める

山下 倫範

立正大学

2024/08/31

目次

完全数問題とは

Pythagoras が命名した完全数とは，自然数 n の 2 倍が丁度 n の約数の和 $\sigma(n)$ になっている場合のときをいう。すなわち，n について次が成立している場合である．

$$2n = \sigma(n) \tag{PN}$$

たとえば，$n = 6$ であれば，

$$2n = 2 \cdot 6 = 12$$
$$\sigma(n) = \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$n = 28$ であれば，

$$2n = 2 \cdot 28 = 56$$
$$\sigma(n) = \sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$$

となり，$n = 6, 28$ は完全数であることがわかる．

完全数問題と円分数

PN を $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}$ として捉えなおすと

$$2\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i} = \prod_{i=1}^{s}(1 + p_i + p_i^2 + \cdots)$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} \tag{PN1}$$

一方，円分多項式 $\Phi_d(x)$ については

$$x^e - 1 = \prod_{d|e} \Phi_d(x) \tag{CP}$$

$$x - 1 = \Phi_1(x)$$

が成立している．

PN1 と CP により，次の関係式

$$2\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i} = \prod_{i=1}^{s} \prod_{\substack{d|e_i+1 \\ d\neq 1}} \Phi_d(p_i)$$

が成立し，円分数 $\Phi_d(n)$ が約数和 $\sigma(n)$ と関係し，約数和 $\sigma(n)$ の素因数を考察することに絞られる．これが，今でも円分数の素因数分解が数多く実験されている所以である．

f を数論的関数で 1 もしくは素数 p に対し，次の性質を有するものとする．

$$f(p) = \begin{cases} 1 & (p = 1) \\ m \ (\ 1 \leqq m < p) & (p > 1) \end{cases}$$

このとき，f よる拡張 Euler 関数 φ_f を次のように定義しよう．

$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}$ に対し，

$$\varphi_f(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i - 1} f(p_i)$$

このとき拡張 Euler 関数 φ_f の導来対数関数 L_f とは，φ_f を用い，次のように定義する．

$$L_f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ L(\varphi_f(n)) + \left| \{\ d \mid d|n,\ \varphi_f(d) = 1\ \} \right| & (n > 1) \end{cases}$$

任意の自然数 m, n や素因数分解について

$$L_f(mn) = L_f(m) + L_f(n)$$

$$L_f\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}\right) = \sum_{i}^{s} e_i L_f(p_i) \tag{extEulerL}$$

等が成立している．

　$f = \varphi$ のときは，φ_f は通常の Euler 関数であるので，L_f を L と略記することにすれば，以下で利用する L についても任意の自然数 m, n や素因数分解について

$$L(mn) = L(m) + L(n)$$

$$L\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}\right) = \sum_{i}^{s} e_i L(p_i) \tag{EulerL}$$

が同様に成立する．

先ほどの L の関係式 (EulerL) を（奇の）完全数の式 PN,PN1 の両辺作用させると，

$$L\left(2\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i}\right) = L\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{e_i+1}+1}{p_i-1}\right)$$

$$1+\sum_{i=1}^{s}e_iL(p_i) = \sum_{i=1}^{s}L\left(\frac{p_i^{e_i+1}-1}{p_i-1}\right)$$

$$1+\sum_{i=1}^{s}e_iL(p_i) = \sum_{i=1}^{s}L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)-L\left(p_i-1\right)$$

$$1+\sum_{i=1}^{s}(e_iL(p_i+L(p_i-1)) = \sum_{i=1}^{s}L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)$$

$$1+\sum_{i=1}^{s}(e_i+1)L(p_i) = \sum_{i=1}^{s}L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)$$

先ほどの式

$$1+\sum_{i=1}^{s}(e_i+1)L(p_i)=\sum_{i=1}^{s}L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)$$

から，奇の完全数 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i}$ を構成する p_i, e_i について，

$$(e_i+1)L(p_i)=L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)$$

が成立していたとすると，明らかな矛盾を生じるので，L を用いての考察には，奇の完全数 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i}$ を構成する p_i, e_i についての

$$L\left(p_i^{e_i+1}-1\right)-(e_i+1)L(p_i)$$

の振舞いや情報を調べることが必要となる．

$p_i^{e_i+1} - 1$ については，円分数表示

$$p_i^{e_i+1} - 1 = \prod_{d \mid e_i+1} \Phi_d(p_i)$$

を用いての計算方法もあるが，この場合，e_{i+1} の素因数分解についての情報が必須となる．

偶数の完全数問題

偶数の完全数問題については，すでに Euclid が Mersenne 素数 $M_p = 2^p - 1$ を用いて $2^{p-1}M_p$ は完全数であることを述べており，後に，Euler がこの形に限ることを証明し，偶数の完全数問題については解決済である．

奇数の完全数問題

奇の完全数 (Odd Perfect Number Problem) については，それを満たす N について，実に様々なことが知られているが，次は基本的である。

$$N = q^E \prod_{i=1}^{s} p_i^{2e_i} \qquad q \equiv E \equiv 1 \pmod 4,\ q,\ p_i \text{ は素数}$$

この式から，前節の Euler 関数の導来対数関数 L や円分数での扱いが，少し繊細になる．
すなわち，偶数 $E+1$ や奇数 $2e_i+1$ の $q,\ p_i$ に関する場合の素因数分解がどのようになるのかの情報が必要になる．
以上を考察するための，いくつかの表を Maple を用いて一部計算したものを，研究会予稿に掲載したので，この表を睨んでなんらかのヒントを頂ければ嬉しい．

References

- Nicomachus of Gerasa. Martin Luther D'Oge (Translator) Introduction to Arithmetic. The Macmillan Company (1926), pp.207–212
- G. H. Hardy, E. M. Wright.Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, (1938) 316
- Jose Arnaldo B. Dris, Doli-Jane Uvales Tejada, Revisiting some old results on odd perfect numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol.24, No.4 18–25 (2018) `https://nntdm.net/papers/nntdm-24/NNTDM-24-4-018-025.pdf`
- 森本-木田，円分数の素因数分解，上智大学数学講究録，No.26，1987 `https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405002`
- 森本-木田-小林，円分数の素因数分解（その 2），上智大学数学講究録，No.29，1989 `https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405003`
- 森本-木田-小林円分数の素因数分解（その 3），上智大学数学講究録，No.35，1992 `https://digital-archives.sophia.ac.jp/repository/view/repository/20220405004`
- Factorizations of Cyclotomic Numbers, `https://www.asahi-net.or.jp/~KC2H-MSM/cn/index.htm`, Refered 2024.8.01
- D.Miyata- M.Yamashita, Note on derived logarithmic functions of Euler's functions, Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Math. Soc. of Japan, 2004.9, (in Japanese)

Thanks

Thank you for your attention.