有限半束の極大鎖とその個数

n-半束 $L=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}, x\in L$ に対して，$\{x_k \mid x<x_k\}$ の極小元を x の直後の元，$\{x_k \mid x_k<x\}$ の極大元を x の直前の元と呼ぶ．$x_0=o$ は直前の元を持たず，L の極大元は直後の元を持たない．これら以外の元は直前の元および直後の元を共に持つ．x が x' の直前の元ならば x' は x の直後の元となり，その逆もいえる．$x,x'\in L$ に対して，$x=x_{k_0}<x_{k_1}<\cdots<x_{k_r}=x'$ かつ各 $x_{k_{i-1}}$ $(i=1,2,\cdots,r)$ が x_{k_i} の直前の元であるとき，この列を x から x' への極大鎖と呼ぶ．特に，o から L の極大元 x' への極大鎖を L 極大鎖，そのときの r を高さと呼ぶ．

L における新たな二項関係 $\prec$ を

$$x\prec y \iff \begin{cases} x \text{ は } L \text{ の非極大元 かつ } x<x' \\ x \text{ は } L \text{ の極大元 \quad かつ } x'=o \end{cases}$$

により定める．L の極大元と o の間に順序関係を付加しただけであり，$L\setminus\{o\}$ 上での二項関係は $<$ と一致する．ただし $\prec$ は半順序の公理を満たさない．L の任意の元を始点として $\prec$ に従う順序で L の元を順次抽出し，$x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\cdots$ のように並べて行くならば，L の元からなる可算無限列 $\mathbf{x}=x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\cdots$ を得る．これを L 列と呼び，L 列全体を $seq(L)$ で表す．L 列は，L 極大鎖を可算無限個接続した L 列

$$\underbrace{oy_1\cdots y_r}_{L\text{ 極大鎖}}\underbrace{oz_1\cdots z_s}_{L\text{ 極大鎖}}\underbrace{ou_1\cdots u_t}_{L\text{ 極大鎖}}\cdots\cdots$$

より先頭部分を適当に取り去ったものといえる．従って L 列は無数の o を含む．L 列の中には周期性を持つもの (周期 L 列) もあるが，これは，L 極大鎖から成る有限 L 列を可算無限回繰返し接続した L 列

$$\overbrace{\underbrace{oy_1\cdots y_r}_{L\text{ 極大鎖}}\underbrace{oz_1\cdots z_s}_{L\text{ 極大鎖}}\cdots\underbrace{ou_1\cdots u_t}_{L\text{ 極大鎖}}}^{\text{有限 }L\text{ 列}}\overbrace{\underbrace{oy_1\cdots y_r}_{L\text{ 極大鎖}}\underbrace{oz_1\cdots z_s}_{L\text{ 極大鎖}}\cdots\underbrace{ou_1\cdots u_t}_{L\text{ 極大鎖}}}^{\text{有限 }L\text{ 列}}\cdots\cdots$$

より先頭部分を適当に取り去ったものといえる．従って，周期 L 列の周期単位部分を切り出し，先頭と末尾を結んで輪を作れば，その輪がいくつかの L 極大鎖を結んだものとなる．逆に，いくつかの L 極大鎖から成る有限 L 列の先頭と末尾を結んで輪を作り，任意の位置で切断し広げるならば，切断で生じた有限 L 列を周期単位とする周期 L 列が得られる．なお，周期 L 列の周期単位部分に重複元が存在することと o が 2 個以上含まれることとは同値である．

次のように定められる写像を L(または $seq(L)$) 上のシフトと呼ぶ．

$$S: seq(L)\ni x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\cdots\longmapsto x_{k_2}x_{k_3}x_{k_4}\cdots\in seq(L)$$

シフト S は先頭の元を取り去る写像である．シフト写像を用いるなら，$\mathbf{x}\in seq(L)$ が周期 $p(\in\mathbb{N})$ の L 列となる条件を $S^p(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ で表せる．周期 p の L 列の個数を $N_p(L)$ と置く．周期 L 列 $\mathbf{x}$ に対して $\min\{p\in\mathbb{N}\mid S^p(\mathbf{x})=\mathbf{x}\}$ を $\mathbf{x}$ の素周期と呼ぶ．L 列 $\mathbf{x}$ が周期 p を持つなら任意の $q\in\mathbb{N}$ につき $\mathbf{x}$ は周期 pq を持つこと，および，素周期 p の L 列が周期 q を持つなら q は p の倍数であることに注意する．

L に対して $(n+1)\times(n+1)$ 行列 $A_L=\left[a_{ij}\right]$ を

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \cdots\ x_{i-1}\text{は極大元かつ } j=1 \\ 1 & \cdots\ x_{i-1}\text{は } x_{j-1}\text{の直前の元} \\ 0 & \cdots\ \text{上記以外} \end{cases}$$

により定める．A_L は，$\prec$ 順序で x_{i-1} が x_{j-1} の直前にあるときに限り $a_{ij}=1$，それ以外では $a_{ij}=0$ となる行列である．A_L^m の $i+1$ 行 $j+1$ 列成分を $a_{i+1,j+1}^{(m)}$ で表すならば，

$$a_{i+1,j+1}^{(m+1)}=a_{i+1,1}^{(m)}a_{1,j+1}+a_{i+1,2}^{(m)}a_{2,j+1}+\cdots+a_{i+1,n+1}^{(m)}a_{n+1,j+1}=\textstyle\sum_{k=1}^{n+1}a_{i+1,k}^{(m)}a_{k,j+1}.$$

右辺の各項は $(x_i$ から x_{k-1} へ m 回で行く経路数$)\times(x_{k-1}$ から x_i への直路の有 $=1$, 無 $=0)$ の和であるから，帰納的に左辺は $\prec$ 順序に従い x_i から x_j へ $m+1$ 回で行く経路数に等しくなる．L の極大元と o とは $\prec$ 順序で結ばれているから，任意の x_i から任意の x_j への $\prec$ 順序に基づく経路は必ず存在する．従って，任意の $i,j\in\{0,1,\cdots,n\}$ に対して $a^{(m)}_{i+1,j+1}>0$ なる $m\in\mathbb{N}$ が必ず存在し，A_L は既約行列であることがわかる．更に，*Perron-Frobenius* の定理により A_L は絶対値最大で重複度 1 の正の実固有値を持つこともわかる．この固有値を λ_L と置く．

次の命題は，記号力学において周知の事柄であるが，主要定理を証明するための要となるので証明を付す．

命題　n-半束 L に対する $N_p(L),A_L,\lambda_L$ について次項が成立する．

(1)　$N_p(L)=trace(A_L^p)$

(2)　$\det(I-\lambda A_l)^{-1}=\exp\Big[\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{N_p(L)}{p}\lambda^p\Big]$

(3)　(2) における exp 内の整級数の収束半径は λ_L^{-1}

証明　周期 p の L 列 $y_1y_2\cdots y_py_1y_2\cdots y_p\cdots$ はその周期単位部分 $y_1y_2\cdots y_p$ により一意に定まり，周期単位部分 $y_1y_2\cdots y_p$ は y_1 を始点として p 回目に y_1 に戻る経路と一対一に対応し合う．A_L^p の対角成分は p 回目で自分自身に戻る経路の総数を表すので (1) が成立する．次に，A_L の固有値の全てを $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}$ とするなら A_L^p の固有値の全ては $\lambda_1^p,\lambda_2^p,\cdots,\lambda_{n+1}^p$ となり，$trace(A_L^p)=\lambda_1^p+\lambda_2^p+\cdots+\lambda_{n+1}^p$ が成立する．$\sum_{p=1}^{\infty}p^{-1}\lambda_i^p\lambda^p=-\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}p^{-1}(-\lambda_i\lambda)^p$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$ は，これを $(-\lambda_i\lambda)$ に関する整級数とみるなら，収束半径 1 で $|\lambda_i\lambda|<1$ のとき $-\log(1-\lambda_i\lambda)$ に収束する．従って，$|\lambda|<\lambda_L^{-1}$ ならば

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{N_p(L)}{p}\lambda^p=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{p=1}^{\infty}p^{-1}(\lambda_i\lambda)^p=-\sum_{i=1}^{n+1}\log(1-\lambda_i\lambda)$$
$$=\log\prod_{i=1}^{n+1}(1-\lambda_i\lambda)^{-1}=\log\big[\det(I-\lambda A_L)^{-1}\big]$$

が成立する．あとは exp をとることにより (2)(3) を得る．　■

主要定理　$\det(I-\lambda A_L)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_{n+1}\lambda^{n+1}, r=1,2,\cdots,n+1$ とするなら，

(1)　$\sum_{k=0}^{r-1}a_kN_{r-k}(L)+ra_r=0$

(2)　高さ r の L 極大鎖の個数は $-a_{r+1}$ で与えられる

証明 $f(\lambda)=\det(I-\lambda A_L)$ と置き $\log f(\lambda)=-\sum_{p=1}^{\infty}p^{-1}N_p(L)\lambda^p$ を微分して $f'(\lambda)=-f(\lambda)\sum_{p=1}^{\infty}N_p(L)\lambda^{p-1}$．すなわち，

$$a_1+2a_2\lambda+\cdots+(n+1)a_{n+1}\lambda^n$$
$$=-(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_{n+1}\lambda^{n+1})(N_1(L)+N_2(L)\lambda+\cdots+N_p(L)\lambda^{p-1}+\cdots)$$

を得る．右辺を展開し，両辺の係数を比較して (1) を得る．次に (2) を示す．$a_0=\det(I)=1$ に注意する．n-半束では ($n\geqq 1$ より) 周期 1 の L 列は存在しないので $N_1(L)=0$．よって，$-a_1=a_0N_1(L)=0, -2a_2=a_0N_2(L)+a_1N_1(L)=N_2(L)$ となる．$yxyx\cdots$ が周期 2 の L 列ならば $xyxy\cdots$ も周期 2 の L 列となり，x か y のいずれかは o に等しい．$y=0$ として前者の周期単位部分 ox は高さ 2 の L 極大鎖を定める．逆に高さ 2 の L 極大鎖 ox は 2 つの周期 2 の L 列 $oxox\cdots$ および $xoxo\cdots$ を定めるので，高さ 2 の L 極大鎖の個数は $N_2(L)/2=-a_2$ で与えられる．従って，$r=2$ のときは主張が成立する．以下，r に関する帰納法を用いて (2) を証明する．

$$-(r+1)a_{r+1}=N_{r+1}(L)-\big[-a_2N_{r-1}(L)-a_3N_{r-2}(L)-\cdots-a_rN_1(L)\big]$$

であるが，この右辺に現れる項 $-a_kN_{r+1-k}(L)\,(k=2,3,\cdots,r)$ について解釈する．周期 $r+1-k$ の L 列の周期単位部分において，先頭から探して最初に現れる o の直前に高さ $k-1$ の L 極大鎖を挿入するならば，この新たな有限 L 列を周期単位部分とする周期 $r+1$ の L 列を得る．この方法で全ての組 (k, 高さ $k-1$ の

L 極大鎖, 周期 $r+1-k$ の L 列）に対して作った周期 $r+1$ の L 列は皆異なる．実際，L 極大鎖を挿入した周期単位部分には，先頭より探して最初の o から 2 番目の o までの間に L 極大鎖が挿入されている．つまり，次のような構成を持つ．

$$\underbrace{y_1 \cdots y_{s-1}}_{\text{前半}} \underbrace{o z_1 \cdots z_{k-1}}_{L\ \text{極大鎖}} \underbrace{o y_{s+1} y_{s+3} \cdots y_{r+1-k}}_{\text{後半}} \quad (y_1 y_2 \cdots y_{r+1-k}\text{は元の周期単位部分}, s\ \text{番目に最初の}\ o)$$

これより L 極大鎖が挿入された 2 つの周期単位部分が一致するのは，元の周期単位部分と挿入 L 極大鎖が共に等しいときに限る．また，周期単位部分に重複元を持つ周期 $r+1$ の L 列は 2 個以上の o を含むので上の方法で構成した周期単位のいずれかと一致する．よって，帰納法の仮定により $-a_k =$(高さ $k-1$ の L 極大鎖の個数) であるから，周期単位部分に重複元を持つ周期 $r+1$ の L 列の個数は上式右辺の $[\cdots]$ 内で与えられ，$-(r+1)a_{r+1}$ は周期単位部分に重複元を持たない周期 $r+1$ の L 列の個数となる．高さ r の L 極大鎖は，その各元を始点とする相異なる $r+1$ 個の (周期単位部分に重複元を持たない) 周期 $r+1$ の L 列を生じ，逆に，任意の周期単位部分に重複元を持たない周期 $r+1$ の L 列はこうして生じた周期 $r+1$ の L 列のいずれかに一致する．これより，$(r+1) \times$ (高さの r の L 極大鎖の個数) $=$ (重複元を持たない周期 $r+1$ の L 列) $=$ $-(r+1)a_{r+1}$ を得，$r+1$ に対する (2) の成立を得る． ■