メモ：Euler 関数の cototient について

2020.11.01　　山下 倫範，宮田大輔，藤田菜摘

2021.02.01　update

2023.12.25　update

φ を Euler('s torsion) 関数とし，その cototient 関数を ϑ で表記する．すなわち，

$$\vartheta(n) = n - \varphi(n) < n$$

要するに，$(n,k) \neq 1$ なる k の個数である．

ここで，coφiter，ϑ の iteration を考えてみると，この導来対数関数 L_ϑ については，我々の定理から，

$$L_\vartheta(xy) = L_\vartheta(x) + L_\vartheta(y)$$

が成立している．

ここでは，この性質を一旦離れて，ϑ 自身の性質を色々と探ってゆこう．次のことが簡単にわかる．

命題 0.1. $\vartheta(1) = 0$　　p が素数であれば　$\vartheta(p^e) = p^{e-1}$

$$\vartheta(1) = 0 \qquad p\text{:prime}\ ,\ \vartheta^{e+1}(p^e) = 0$$

$$x\text{:odd}\ ,\ \vartheta(2x) - \vartheta(x) = x$$

$$\vartheta(2^e \cdot 3^k) = 2^e \cdot 3^k - 2^{e-1} \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2^{e+1} \cdot 3^{k-1} \qquad \vartheta^{e+2} = 0$$

$\vartheta(x)$ については，$\varphi(x)$ と同じく

$$\vartheta(x) = \frac{x}{\mathrm{rad}(x)}\vartheta(\mathrm{rad}(x)) \qquad \varphi(x) = \frac{x}{\mathrm{rad}(x)}\varphi(\mathrm{rad}(x))$$

が成立しているので，x が根基数の場合を考察すればよい．以下，p, q を奇素数とする．

命題 0.2.

$$\vartheta(2p) = 2p - (p-1) = p + 1 = \text{Relue 関数}$$

次に，$p = 2^e p_0 + 1$, $q = 2^k q_0 + 1$　（p_0. q_0：奇数）としておく

命題 0.3.

$$\vartheta(2pq) = 2pq - (p-1)(q-1) = (p+1)(q+1) - 2 = 2p_0 \cdot 2q_0 - 2 = 2(2^{e+k-1}p_0q_0 - 1)$$

.

命題 0.4.

$$\vartheta(pq) = pq - (p-1)(q-1) = p + q - 1 = \text{奇数}$$