補題 (一般化)

r を非負整数, $n \geq 2$ を自然数とするとき

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(\log xy)^{n-2}}{1-xy}(xy)^r dxdy = (-1)^n(n-1)!\left(\zeta(n)-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^n}\right)$$

が成り立つ。

証明

最初に $n=2$ のときを証明する。

$t \geq 0$ に対して

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(xy)^{r+t}}{1-xy}dxdy$$

を考える。以後, 積分の範囲は 0 から 1 とする。

$\dfrac{1}{1-xy} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$ を代入し項別積分すると

$$\begin{aligned}\iint \frac{(xy)^{r+t}}{1-xy}dxdy &= \iint (xy)^{r+t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\right)dxdy \\ &= \iint \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^{k+r+t}dxdy \\ &= \int \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+t+1}x^{k+r+t+1}y^{k+r+t}\right]_0^1 dy \\ &= \int \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+t+1}y^{k+r+t}\right)dy \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+t+1)^2}y^{k+r+t+1}\right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+t+1)^2}.\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $t=0$ とすると

$$\iint \frac{(xy)^r}{1-xy}dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^2}. \tag{2}$$

ζ 関数の定義より

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2}.
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}.$$

(2) より

$$\iint \frac{(xy)^r}{1-xy} dxdy = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}.$$

次に (1) の両辺を $n-2$ 回 t で微分すると, a を定数として $\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\{a^x\} = (\log a)^{n-2} a^x$, $\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left\{\dfrac{1}{x^2}\right\} = (-1)^n (n-1)! \dfrac{1}{x^n}$ なので

$$\iint \frac{(xy)^r}{1-xy} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left\{(xy)^t\right\} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left\{ \frac{1}{(k+r+t+1)^2} \right\}$$

$$\iint \frac{(xy)^r}{1-xy} (\log xy)^{n-2} (xy)^t dxdy = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+t+1)^n}.$$

$t=0$ とすると

$$\iint \frac{(\log xy)^{n-2}}{1-xy} (xy)^r dxdy = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^n}. \qquad (3)$$

ζ 関数の定義より

$$\begin{aligned}
\zeta(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^n} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^n}
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^n} = \zeta(n) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^n}.$$

(3) に代入すると

$$\iint \frac{(\log xy)^{n-2}}{1-xy}(xy)^r dxdy = (-1)^n (n-1)! \left(\zeta(n) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^n} \right)$$

となり, これは $n=2$ のときも満たすので補題が証明された。