第3章　証明の準備

3.1　無理数と有理数

有理数でない実数を無理数といい, 有理数と無理数は有理数による近似の度合いによって区別される.

今後, 有理数 $\frac{a}{b}$ とするとき, a, b は整数で $b \neq 0$ とする. すべての有理数 $\alpha = \frac{a}{b}(b > 0)$ に対して, すべての有理数 $\frac{p}{q} \neq \alpha$ は不等式

$$|q\alpha - p| = \frac{|aq - bp|}{b} \geq \frac{1}{b}$$

を満たす. ここで, 0 でない整数の絶対値が 1 以上であることを用いた.

これより次の定理を得る.

定理　有理数 α に対して, α のみに依存する正定数 c が存在し, 不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q}$$

がすべての有理数 $\frac{p}{q} \neq \alpha(q > 0)$ に対して成り立つ.

系　実数 α に対して

$$0 < |q_n\alpha - p_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を満たす整数列 $p_n, q_n (n \geq 0)$ が存在するならば, α は無理数である.

定理　無理数 α に対して不等式

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

を満たす整数の無限列 $p_n, q_n (n \geq 0)$ が存在する.

3.2　最小公倍数の上限

補題　$1, 2, \ldots, n$ の最小公倍数を d_n とすると, 不等式

$$d_n \leq 3^n$$

が十分大きいすべての n に対して成り立つ.

証明

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k + 1$$

を満たす整数列 $a_1, a_2, \ldots$ を考える. この数列は非線形回帰関係式

$$a_{k+1} = a_k(a_k - 1) + 1 = a_k^2 - a_k + 1 \qquad (k \geq 1) \tag{3.1}$$

を満たす.(3.1) より

$$\frac{1}{a_{k+1} - 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k} \qquad (k \geq 1)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = 1. \tag{3.2}$$

(3.1) より

$$\frac{\log a_{k+1}}{a_{k+1}} \frac{a_k}{\log a_k} < 2\frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{1}{2} \qquad (k \geq 3).$$

したがって

$$\sum_{k=6}^{\infty} \frac{\log a_k}{a_k} < 2\frac{\log a_6}{a_6} < 0.00001.$$

よって

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log a_k}{a_k} < \sum_{k=1}^{5} \frac{\log a_k}{a_k} + 0.00001 < 1.08241. \tag{3.3}$$

また次の不等式が成り立つ.

$$[x] - \sum_{i \leq 1} \left[\frac{x}{a_i}\right] \geq 1 \qquad (x \geq 1). \tag{3.4}$$

$a_k \leq x < a_{k+1}$ を満たす k をとると, (3.2) より

$$\sum_{i \geq 1} \left[\frac{x}{a_i}\right] = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{x}{a_i}\right] = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{[x]}{a_i}\right] \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{[x]}{a_i} < [x].$$

両辺は整数であるから, その差は 1 より大きい.

最小公倍数の定義より

$$d_n = \prod_{p \le n} p^{[\log_p n]}.$$

右辺の p はすべての素数にわたる.

$$c_n = \frac{n!}{\left[\frac{n}{a_1}\right]! \left[\frac{n}{a_2}\right]! \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]!}$$

とおく. ここで $k = k(n)$ は $a_k \le n < a_{k+1}$ を満たす整数とする. 一般に, 正整数 m に対して, $m!$ に現れる素数 p のベキ指数は

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \cdots \tag{3.5}$$

で与えられる. したがって, c_n の素因数分解に現れる素数 $p \le n$ のベキ指数を $\alpha_p(n)$ とするとき

$$c_n = \prod_{p \le n} p^{\alpha_p(n)}.$$

ただし

$$\alpha_p(n) = \sum_{i=1}^{[\log_p n]} \left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{\frac{n}{a_1}}{p^i}\right] - \left[\frac{\frac{n}{a_2}}{p^i}\right] - \cdots \right) \ge [\log_p n].$$

最後の不等式は, (3.4)($x = \dfrac{n}{p^i}$) による. よって $d_n \le c_n \quad (n \ge 1)$.

次に十分大きいすべての n に対して

$$c_n < 3^n \tag{3.6}$$

が成り立つことを示す. $t = \left[\frac{n}{a_1}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a_k}\right]$ とおくと

$$t^t = \left(\left[\frac{n}{a_1}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a_k}\right] \right)^t > \frac{t!}{\left[\frac{n}{a_1}\right]! \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]!} \left[\frac{n}{a_1}\right]^{\left[\frac{n}{a_1}\right]} \cdots \left[\frac{n}{a_k}\right]^{\left[\frac{n}{a_k}\right]}. \tag{3.7}$$

さらに

$$\frac{\left(\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}}}{\left[\frac{n}{a_i}\right]^{\left[\frac{n}{a_i}\right]}} < \left(\frac{en}{a_i}\right)^{1-\frac{1}{a_i}} \qquad (1 \le i \le k) \tag{3.8}$$

が成り立つ.

$$\left[\frac{n}{a_i}\right] \ge \frac{n}{a_i} - \frac{a_i - 1}{a_i} = \frac{n}{a_i} \left(1 + \frac{a_i - 1}{n - a_i + 1}\right)^{-1}$$

と, 不等式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x \geq 1)$ より

$$\frac{\left(\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}}}{\left[\frac{n}{a_i}\right]^{\left[\frac{n}{a_i}\right]}} \leq \left(\frac{n}{a_i}\right)^{\frac{n}{a_i}-\frac{n-a_i+1}{a_i}} \left(1+\frac{a_i-1}{n-a_i+1}\right)^{\frac{n-a_i+1}{a_i-1}\frac{a_i-1}{a_i}} \leq \left(\frac{en}{a_i}\right)^{1-\frac{1}{a_i}}.$$

(3.7) と (3.8) より

$$c_n < \frac{n^n \left(\frac{en}{a_1}\right)^{1-\frac{1}{a_1}} \cdots \left(\frac{en}{a_k}\right)^{1-\frac{1}{a_k}}}{\left(\frac{en}{a_1}\right)^{1-\frac{1}{a_1}} \cdots \left(\frac{en}{a_k}\right)^{1-\frac{1}{a_k}}}.$$

両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} \log c_n &< n\log n + \sum i = 1^k \left(1-\frac{1}{a_i}\right)\left(1+\log\frac{n}{a_i}\right) - \sum_{i=1}^k \frac{n}{a_i}\log\frac{n}{a_i} \\ &< n\log n + k(1+\log n) - n\log n \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} + n\sum_{i=1}^k \frac{\log a_i}{a_i}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$a_k \leq n < a_{k+1}$ より

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \frac{2}{a_{k+1}} < \frac{2}{n}. \tag{3.10}$$

また $a_3 = 7 > 2^{2^1}+1$ と k に関する帰納法より

$$a_k = a_{k-1}(a_{k-1}-1)+1 > 2^{2^{k-2}}+1 \qquad (k \geq 3).$$

両辺の対数をとり

$$k < \log_2 \log_2 n + 2 \tag{3.11}$$

が成り立つ. (3.3), (3.9), (3.10), (3.11), より

$$\log c_n < 2\log n + 2\log n \cdot \log_2 \log_2 n + 1.08241n.$$

よって n が十分大きいとき $\log c_n < 1.08242n$. すなわち

$$c_n < e^{1.08242n} < 3^n.$$

3.3　2 重積分と ζ 関数

2 重積分と ζ 関数の関係を導いていくが, まずは塩川 [3] によるものを紹介し, 途中の詳しい計算方法は次節で行う.

今後の積分は広義積分であり, 積分範囲はすべて 0 から 1 とし, $\int_0^1$ を $\int_\epsilon^{1-\epsilon}$ と置き換えて $\epsilon \to 0$ とすることにより正当化できる.

補題　r, s を非負整数とするとき

$$\iint \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy = \begin{cases} \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} & (r = s) \\ \frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^{r} \frac{1}{k} & (r > s). \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\iint \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dxdy = \begin{cases} -2\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^3}\right) & (r = s) \\ -\frac{1}{r-s} \sum_{k=s+1}^{r} \frac{1}{k^2} & (r > s). \end{cases} \tag{3.13}$$

証明　実数 $\sigma \geq 0$ に対する 2 重積分

$$\iint \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy$$

について, $\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$ を代入し項別積分すると

$$\begin{aligned} \iint \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy &= \iint x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k dxdy \\ &= \iint \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^{k+r+\sigma} y^{k+s+\sigma} \right) dxdy \\ &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+r+\sigma+1} x^{k+r+\sigma+1} y^{k+s+\sigma} \right]_0^1 dy \\ &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+r+\sigma+1} y^{k+s+\sigma} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)} y^{k+s+\sigma+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}. \end{aligned}$$

よって

$$\iint \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}. \tag{3.14}$$

$r = s$ のとき (3.14) で $t = 0$ とすると (3.12)$(r = s)$ となり, (3.14) の両辺を σ について 1 回微分したあと $\sigma = 0$ とすれば (3.13)$(r = s)$ となる.

次に $r > s$ のとき (3.14) の右辺を部分分数に展開すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+s+\sigma+1}-\frac{1}{k+r+\sigma+1}\right)\\&=\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1}+\frac{1}{s+\sigma+2}+\cdots+\frac{1}{r+\sigma}\right)\end{aligned}$$

$\sigma = 0$ とすれば (3.12)$(r > s)$ を得る. また (3.14) を部分分数に展開し, 両辺を t について 1 回微分すれば

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+s+\sigma+1}-\frac{1}{k+r+\sigma+1}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+s+\sigma+1)^2}-\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}\right\}.\end{aligned}$$

$t = 0$ とすれば (3.13)$(r > s)$ を得る.

3.4　2 重積分の拡張

第 3.3 節で得られた補題を, n を自然数とし $\zeta(n)$ にまで拡張する.

補題　r, s を非負整数, $n \geq 2$ を自然数とするとき

$$\iint \frac{(\log xy)^{n-2}}{1-xy}x^r y^s dxdy = \begin{cases} (-1)^n(n-1)!\left(\zeta(n)-\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^n}\right) & (r=s) \\ \dfrac{(-1)^n(n-1)!}{r-s}\displaystyle\sum_{k=s+1}^{r}\frac{1}{k^{n-1}} & (r>s)\end{cases}$$

証明　$n = 2$ のときは (3.12) で証明されているので, ここでは $n \geq 3$ として考える.

$r = s$ のとき (3.14) の両辺を σ について $n-2$ 回微分すると,

$$\begin{aligned}\iint \frac{(xy)^r}{1-xy}\cdot\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}\left\{(xy)^\sigma\right\}dxdy &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}\left\{\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}\right\}\\ \iint \frac{(xy)^r}{1-xy}(\log xy)^{n-2}(xy)^\sigma dxdy &= (-1)^n(n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^n}.\end{aligned}$$

$\sigma = 0$ とすると

$$\iint \frac{(\log xy)^{n-2}}{1-xy}(xy)^r dxdy = (-1)^n(n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^n}.$$

(2.2) より $r = s$ の場合が得られる.

次に $r > s$ とし, (3.14) の右辺を部分分数展開した後 σ について $n-2$ 回微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}\left\{\frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k+s+\sigma+1}-\frac{1}{k+r+\sigma+1}\right\}\right\} \\
&=\frac{1}{r-s}(-1)^n(n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+s+\sigma+1)^{n-1}}-\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^{n-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

$\sigma = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+s+1)^{n-1}}-\frac{1}{(k+r+1)^{n-1}}\right\} \\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+s+1)^{n-1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^{n-1}} \\
&=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{1}{k^{n-1}}-\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k^{n-1}} \\
&=\sum_{k=s+1}^{r}\frac{1}{k^{n-1}}+\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k^{n-1}}-\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k^{n-1}} \\
&=\sum_{k=s+1}^{r}\frac{1}{k^{n-1}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

よって $r > s$ の場合が得られる.

第4章　ζ関数の整数点での値

4.1　$\zeta(2)$の無理数性の証明

定理　$\zeta(2)$ は無理数である.

証明　2 重積分

$$I_n = \iint \frac{(1-y)^n}{1-xy} P_n(x) dxdy \tag{4.1}$$

を考え

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^n(1-x)^n\right\} \tag{4.2}$$

とする. 右辺の $(1-x)^n$ を 2 項展開し微分すると

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\right\} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n+k}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n!}\frac{(n+k)!}{k!}(-1)^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(-1)^k x^k
\end{aligned}$$

となるので $(1-y)^n P_n(x)$ は x, y の n 次整係数多項式となる. よって (3.12) より

$$d_n^2 I_n = q_n \zeta(2) - p_n \tag{4.3}$$

となる整数列 p_n, q_n が存在する.

(4.1) の右辺を x について n 回部分積分すると

$$I_n = \iint \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy.$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}\right\}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}\right\}=0$$

となる点を取ると, $x=y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき極大となり

$$0<\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}\leq\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 \qquad (0<x,y<1)$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}0<|I_n|&=\left|\iint\left\{\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right\}^n\frac{1}{1-xy}dxdy\right|\\&\leq\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\iint\frac{1}{1-xy}dxdy\\&=\zeta(2)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}.\end{aligned}$$

(4.3), 第 3.2 節の補題より, 十分大きい n に対して

$$\begin{aligned}0<d_n^2\,|I_n|=|q_n\zeta(2)-p_n|&\leq\zeta(2)d_n^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\\&\leq\zeta(2)9^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\leq\left(\frac{5}{6}\right)^n\end{aligned}$$

となるから

$$0<|q_n\zeta(2)-p_n|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となる. よって第 3.1 節の系より $\zeta(2)$ は無理数である.

4.2　$\zeta(3)$ の無理数性の証明

$\zeta(3)$ が無理数であることは 1978 年 R.Apéry によって初めて証明された.

次の証明は F.Beukers による証明である.

定理　$\zeta(3)$ は無理数である.

証明　2 重積分

$$I_n=-\iint\frac{\log xy}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy$$

を考える. ここで $P_n(x), P_n(y)$ は (4.2) で定義される。よって $P_n(x), P_n(y)$ は x, y に関して n 次整係数多項式となる. (3.13) より

$$d_n^3 I_n = q_n\zeta(3) - p_n$$

となる整数列 p_n, q_n が存在する.

積分

$$-\frac{\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}dz$$

より

$$I_n = \iiint \frac{1}{1-(1-xy)z}P_n(x)P_n(y)dxdydz.$$

右辺を x について n 回部分積分すると

$$I_n = \iiint \frac{(xyz)^n(1-x)^n}{\{1-(1-xy)z\}^{n+1}}P_n(y)dxdydz.$$

ここで

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$$

とおくと, w, z の対称式であり, w は z の減少関数であるから, 変数変換すると

$$I_n = \iiint \frac{(1-x)^n(1-w)^n}{1-(1-xy)w}P_n(y)dxdydw.$$

y について n 回部分積分すると

$$I_n = \iiint \frac{\{x(1-x)y(1-y)w(1-w)\}^n}{\{1-(1-xy)w\}^{n+1}}dxdydw.$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x(1-x)w(1-w)y(1-y)}{1-(1-xy)w}\right\} = 0 \Rightarrow 1-2x-w-2xw-x^2yw = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x(1-x)w(1-w)y(1-y)}{1-(1-xy)w}\right\} = 0 \Rightarrow 1-2y-w-2yw-xy^2w = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{x(1-x)w(1-w)y(1-y)}{1-(1-xy)w}\right\} = 0 \Rightarrow 1-2w+w^2-xyw^2 = 0$$

となる点をとると, 停留点は $(x, x, \frac{1}{1+x})$ であり, $x = \sqrt{2}-1$ で極大値をとり

$$0 < \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^4 \qquad (0 < x, y, w < 1)$$

が成り立つ. よって

$$
\begin{aligned}
0 < I_n &\leq \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \iiint \frac{1}{1-(1-xy)w} dxdydw \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \left\{ -\iint \frac{\log xy}{1-xy} dxdy \right\} = 2\zeta(3) \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}.
\end{aligned}
$$

第 3.2 節の補題より, 十分大きい n に対して

$$
\begin{aligned}
0 < d_n^3 I_n &\leq 2\zeta(3) d_n^3 \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} \\
&\leq 2\zeta(3) 27^n \left(\sqrt{2}-1\right)^{4n} < \left(\frac{4}{5}\right)^n
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

となるから

$$
0 < |q_n \zeta(3) - p_n| \to 0 \qquad (n \to \infty).
$$

よって第 3.1 節の系より $\zeta(3)$ は無理数である.

第5章　$\zeta(5)$ の無理数性の証明

5.1　4重積分と $\zeta(4)$ の関係

補題　r, s, t, u を非負整数とするとき

$$
\begin{aligned}
&\iiiint \frac{w^r x^s y^t z^u}{1-wxyz} dwdxdydz \\
&= \begin{cases} \zeta(4) - \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^r} & (r = s = t = u) \\ \zeta(2), \zeta(3) \text{ を含んだ 4 乗以下の逆数の有限和} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

証明　$\sigma \geq 0$ に対し

$$\iiiint \frac{w^{r+\sigma} x^{s+\sigma} y^{t+\sigma} z^{u+\sigma}}{1-wxyz} dwdxdydz$$

を考える. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (wxyz)^k = \frac{1}{1-wxyz}$ より

$$
\begin{aligned}
&\iiiint w^{r+\sigma} x^{s+\sigma} y^{t+\sigma} z^{u+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (wxyz)^k dwdxdydz \\
&= \iiiint \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+r+\sigma} x^{k+s+\sigma} y^{k+t+\sigma} z^{k+u+\sigma} dwdxdydz \\
&= \iiint \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+r+\sigma+1} x^{k+s+\sigma} y^{k+t+\sigma} z^{k+u+\sigma} dxdydz \\
&= \iint \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)} y^{k+t+\sigma} z^{k+u+\sigma} dydz \\
&= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)(k+t+\sigma+1)} z^{k+u+\sigma} dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)(k+t+\sigma+1)(k+u+\sigma+1)}.
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{aligned}&\iiiint \frac{w^{r+\sigma}x^{s+\sigma}y^{t+\sigma}z^{u+\sigma}}{1-wxyz}dwdxdydz\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)(k+t+\sigma+1)(k+u+\sigma+1)}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

$r=s=t=u$ のとき (5.1) より

$$\iiiint \frac{(wxyz)^{r+\sigma}}{1-wxyz}dwdxdydz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^4}.$$

$\sigma=0$ とすると (2.2) より

$$\iiiint \frac{(wxyz)^{r}}{1-wxyz}dwdxdydz=\zeta(4)-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^4}.$$

それ以外のときは (5.1) の右辺を部分積分し, 付録 A における部分分数の展開に $a=r+\sigma+1, b=s+\sigma+1, c=t+\sigma+1, d=u+\sigma+1$ を代入することによって得られる.

5.2　$\zeta(4)$ の評価式

$$I_n=\iiiint \frac{1}{1-wxyz}(1-x)^n(1-y)^n(1-z)^nP_n(w)dwdxdydz$$

を考える．ここで $P_n(w)$ は (4.2) で定義される．よって $(1-x)^n(1-y)^n(1-z)^nP_n(w)$ は w,x,y,z に関して n 次整係数多項式となる.

第 5.1 節の補題より

$$d_n^4I_n=p_n\zeta(4)+q_n\zeta(3)+r_n\zeta(2)+s_n\tag{5.2}$$

となる整数列 p_n,q_n,r_n,s_n が存在する.

上式を w について両辺を n 回部分積分すると

$$\iiiint \frac{(wxyz)^n}{(1-wxyz)^{n+1}}(1-w)^n(1-x)^n(1-y)^n(1-z)^ndwdxdydz.$$

ここで

$$\frac{w(1-w)x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-wxyz}$$

の停留点は (w,w,w,w) であり, $w^4+w^3+w^2+w-1=0$ の解を α とするとき, 極大値 $\dfrac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{1-\alpha^4}$ をとり, その値は約 0.0042875666826 となる. よって第 5.1 節の補題より

$$\begin{aligned} I_n &\leq \left\{\frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{1-\alpha^4}\right\}^n \iiiint \frac{1}{1-wxyz} dwdxdydz \\ &= \zeta(4)\left\{\frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{1-\alpha^4}\right\}^n. \end{aligned}$$

第 3.2 節の補題より

$$\begin{aligned} 0 < d_n^4|I_n| &= |p_n\zeta(4)+q_n\zeta(3)+r_n\zeta(2)+s_n| \\ &\leq \zeta(4)3^{4n}\left\{\frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{1-\alpha^4}\right\}^n \\ &\leq \left(\frac{2}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

5.3　4 重積分と $\zeta(5)$ の関係

補題　r,s,t,u を非負整数とするとき

$$\begin{aligned} &\iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz} w^r x^s y^t z^u dwdxdydz \\ &= \begin{cases} -4\left(\zeta(5)-\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^5}\right) & (r=s=t=u) \\ \zeta(3),\zeta(4) \text{ を含んだ 5 乗以下の逆数の有限和} & (\text{それ以外}) \end{cases} \end{aligned}$$

証明　$r=s=t=u$ のとき (5.1) より

$$\iiiint \frac{(wxyz)^{r+\sigma}}{1-wxyz} dwdxdydz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^4}.$$

より, 両辺を σ で微分すると

$$\iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz}(wxyz)^{r+\sigma} dwdxdydz = -4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^5}.$$

$\sigma=0$ とすれば

$$\iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz}(wxyz)^{r} dwdxdydz = -4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^5}$$

(2.2) から

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^5} = \zeta(5)-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^5}.$$

よって

$$\iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz}(wxyz)^r dwdxdydz = -4\left(\zeta(5) - \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^5}\right).$$

それ以外のとき, 付録 A にある公式に $a=r+\sigma+1, b=s+\sigma+1, c=t+\sigma+1, d=u+\sigma+1$ を代入し, σ について微分したあと $\sigma=0$ を代入すると得られる.

5.4　$\zeta(5)$ の無理数性の証明

$\zeta(5)$ が無理数であることを示していく.

$$I_n = -\iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz}(1-w)^n(1-x)^n P_n(y)P_n(z)dwdxdydz$$

とする. ここで $P_n(y), P_n(z)$ は (4.2) で定義される. よって, $(1-w)^n(1-x)^n P_n(y)P_n(z)$ は w,x,y,z に関して n 次整係数多項式となる.

第 5.3 節の補題から,

$$d_n^5 I_n = p_n\zeta(5) + q_n\zeta(4) + r_n\zeta(3) + s_n \tag{5.3}$$

となる整数列 p_n, q_n, r_n, s_n が存在する.

積分

$$-\frac{\log wxyz}{1-wxyz} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-wxyz)v}dv \tag{5.4}$$

より

$$I_n = \int\cdots\int \frac{1}{1-(1-wxyz)v}(1-w)^n(1-x)^n P_n(y)P_n(z)dwdxdydzdv.$$

y について n 回部分積分すると

$$I_n = \int\cdots\int \frac{(wxyzv)^n}{\{1-(1-wxyz)v\}^{n+1}}(1-w)^n(1-x)^n(1-y)^n P_n(z)dwdxdydzdv.$$

ここで

$$\alpha = \frac{1-v}{1-(1-wxyz)v}$$

と積分変換すると

$$I_n = \int\cdots\int \frac{1}{1-(1-wxyz)\alpha}(1-w)^n(1-x)^n(1-y)^n(1-\alpha)^n P_n(z)dwdxdydzd\alpha.$$

z について n 回部分積分すると

$$I_n = \int \cdots \int \frac{w^n(1-w)^n x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n \alpha^n(1-\alpha)^n}{\{1-(1-wxyz)\alpha\}^{n+1}} dwdxdydzd\alpha.$$

α を v と変換しておく.

$$I_n = \int \cdots \int \left\{ \frac{w(1-w)x(1-x)y(1-y)z(1-z)v(1-v)}{1-(1-wxyz)v} \right\}^n \frac{dwdxdydzdv}{1-(1-wxyz)v}.$$

次に

$$f(w,x,y,z,v) = \frac{w(1-w)x(1-x)y(1-y)z(1-z)v(1-v)}{1-(1-wxyz)v}$$

とおく. 各変数の偏微分を計算し

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial w} &= 0 \Rightarrow 1 - v - 2w + 2wv - w^2xyzv = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 1 - v - 2x + 2xv - wx^2yzv = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 1 - v - 2y + 2yv - wxy^2zv = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \Rightarrow 1 - v - 2z + 2zv - wxyz^2v = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \Rightarrow 1 - v + v^2 - wxyzv^2 = 0
\end{aligned}$$

これを解くと関数 f の停留点は $(w,w,w,w,\dfrac{1}{1+w^2})$ となり, これを代入すると

$$f(w,w,w,w,\frac{1}{1+w^2}) = f(w) = \frac{w^4(1-w)^4}{(1+w^2)^2}.$$

$\dfrac{df}{dw} = 0$ の解を α とすると $\alpha^3 + 2\alpha - 1 = 0$ となり, 3 次方程式の解の公式より

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

(5.4) と第 5.3 節の補題より

$$\begin{aligned}
I_n &\leq \left\{ \frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2} \right\}^n \int \cdots \int \frac{1}{1-(1-wxyz)v} dwdxdydzdv \\
&= \left\{ \frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2} \right\}^n \left\{ - \iiiint \frac{\log wxyz}{1-wxyz} dwdxdydz \right\} \\
&= 4\zeta(5) \left\{ \frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2} \right\}^n
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2}$ は約 0.002595485 となる.
(5.3) より

$$\begin{aligned}
0 < d_n^5|I_n| &= |p_n\zeta(5)+q_n\zeta(4)+r_n\zeta(3)+s_n| \\
&\leq 4\zeta(5)3^{5n}\left\{\frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2}\right\}^n = 4\zeta(5)243^n\left\{\frac{\alpha^4(1-\alpha)^4}{(1+\alpha^2)^2}\right\}^n \\
&\leq \left(\frac{7}{10}\right)^n \to 0 \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

よって $\zeta(5)$ は無理数であることがわかる.