解答例

I.

問題 1.

問 1. $z = e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta$ より $\cos\theta = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ である.$z = e^{\imath\theta}$ より $dz = \imath e^{\imath\theta}d\theta$ であり，また $\cos\theta = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ である.

問 2. $z = e^{\imath\theta}$ より $dz = \imath e^{\imath\theta}d\theta = \imath z d\theta$ であるので，問 1 の結果から，積分路は $C : |z| = 1$（反時計回り）となる

問 3. 分母の $z^2 + 4z + 1 = 0$ の解が特異点となるので，特異点は $z = -2 \pm \sqrt{3}$ の 2 点である.

問 4.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{2+\cos\theta} = \oint_C \frac{-\imath d\,z}{z\left(2+\frac{z+\bar{z}}{2}\right)} = -2\imath \oint_C \frac{d\,z}{z^2+4z+1} \quad (\because \quad z\bar{z}=1) \\
&= -2\imath \oint_C \frac{d\,z}{(z-\alpha((z-\beta)} \quad \left(\alpha = -2-\sqrt{3}\,, \beta = -2+\sqrt{3}\,\right) \\
&= -2\imath\left(\oint_C \frac{\frac{1}{\alpha-\beta}}{z-\alpha} d\,z + \oint_C \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{z-\beta} d\,z\right) = -2\imath \oint_C \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{z-\beta} d\,z \quad (\because \quad \alpha\text{は単位円の外側にある}) \\
&= -2\imath \oint_C \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{z-\beta} d\,z = (-2\imath)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \oint_C \frac{d\,z}{z-\beta}\right) = (-2\imath)\frac{1}{2\sqrt{3}}(2\pi\imath) \quad (\text{留数定理より}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi
\end{aligned}
$$

問題 2.

問 1.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z^4} + \cdots\right) \\
&= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

問 2. $z = 0$ における留数はローラン展開での $\dfrac{1}{z}$ の係数であるから，$\dfrac{1}{6}$ である．

II.

問題 1.

問 1.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

問 2. A b の固有多項式は

$$f(\lambda) = \det A = |A - \lambda I_2| = \lambda^2 + 6\lambda + 5$$

であるので, $f(\lambda) = 0$ の解, $\lambda = -1,\ -5$ が固有値となり, 固有ベクトルはそれぞれ (1, 1), (1, −1) ととれるから，正規化された固有ベクトルはそれぞれ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる.

問 3.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

より，$U^T U = UU^T = I_2$ は即座に確認できる.

問題 2

問 1. $\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} = A\mathrm{r}$ であるから，$UU^T = I$ を用いれば，$\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} = A\mathrm{r} = AUU^T\mathrm{r} = AU\mathrm{q}$.

すなわち，$\dfrac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} = AU\mathrm{q}$ である．ˆ

とりあえずここまで・・・

問 2.

問 3.

問 4.