

# 環境情報数学演習Ⅰ 理解度確認小テスト

平成31年1月21日 実施

この問題用紙はお持ち帰りください

試験要領は WebClass で公開しています。

この試験問題は  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  で作成しています

各問題には配点を示してあります。配点も参考にしながら問題にとりかかってください。

$\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  はそれぞれ  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  の逆関数を表し、それらの値域は  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$  とします。

また、問題 1・2 については、分数は既約分数で表すものとし、整数を表すときには分母を 1 としなさい。

問題 1. (15 点)  $-1 \leq x \leq 10$  において関数

$$f(x) = \arcsin x + \arccos(x^2)$$

を考えたとき

(1)  $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \pi$

(2)  $f(x)$  は  $x = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  のとき最大となり、 $x = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  で最小となる。

問題 2. (12 点) 次の 2 つの極限值を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 5})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 4x}{x^2}$$

問題 3. (各 3 点) 次の定積分を求めなさい。

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \quad , \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \quad ,$

(3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \quad (m \neq n), \quad (4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \quad ,$

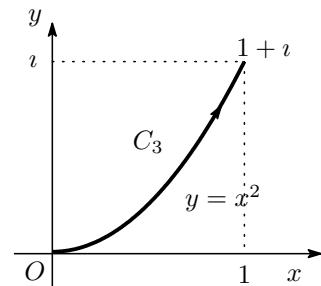
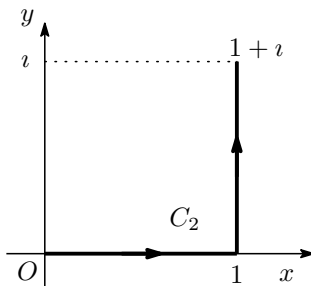
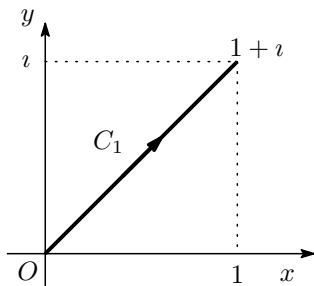
(5)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \quad (m \neq n), \quad (6) \int_0^{\pi} \sin mx \cos mx \, dx = \quad (m > 1)$

問題 4. (16 点) 全微分可能な関数  $z = f(x, y) = \cos(x + y)$  について、

(1)  $z$  の全微分  $dz = \boxed{\phantom{000}} dx + \boxed{\phantom{000}} dy$  を求めなさい。

(2) 点  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0\right)$  における全微分  $dz = \boxed{\phantom{000}} dx + \boxed{\phantom{000}} dy$  を求めなさい。

問題 5. (24 点) 次の各積分経路  $C_1, C_2, C_3$  に沿って、点  $O$  から点  $1+i$  ( $i$  は虚数単位) までの線積分  $\int_{C_k} z^2 \, dz$ ,  $\int_{C_k} z \bar{z} \, dz$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の値を求めなさい。



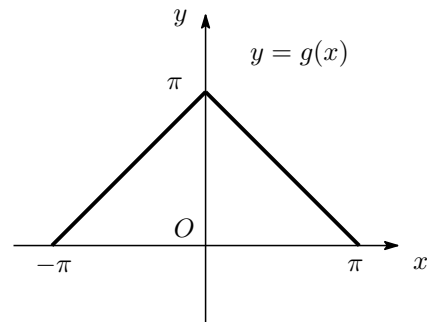
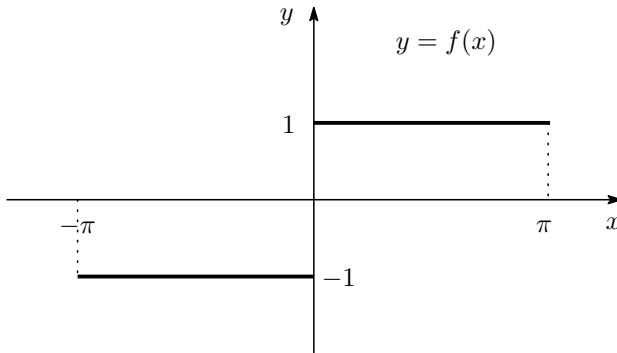
問題 6. (15 点) 関数  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$  を特異点  $z = 0$  を中心にローラン展開し、留数  $R$  を求め、

留数定理:  $\oint_C f(z) \, dz = 2\pi i R$  ( $i$  は虚数単位)

を用いて、積分路  $C = \{z : |z| = 2 \text{ (counter-clockwise)}\}$  について  $\oint_C f(z) \, dz$  の値を求めなさい。

問題 7. (各 10 点) 次の関数をフーリエ級数展開した時の各フーリエ係数  $a_k, b_k$  を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x + \pi & (-\pi < x < 0) \\ -x + \pi & (0 < x < \pi) \end{cases}$$



問題 8. (15 = 3 + 5 + 7 点) 次の微分方程式を解きなさい.

- (1)  $y'' - 5y' + 6 = 0$
- (2)  $y'' - 5y' + 6 = 0, \quad y(0) = 1, y(1) = -1$
- (3)  $y'' - 5y' + 6 = e^x$

問題 9. (10 = 4 + 6 点) 次の用語 (1) の定義, (2) の内容を述べなさい. ただし,  $i$  は虚数単位  $\sqrt{-1}$  とする.

- (1) 複素関数  $f(z)$  が  $z_0 = a + i b$  ( $a, b$  は実数) で微分可能である.
- (2)  $z = x + i y$  とし, 複素平面  $\mathbb{C}$  を実平面  $\mathbb{R}^2$  と同一視すると, 複素関数  $f(z)$  は 2 つの実 2 変数関数  $u(x, y), v(x, y)$  を用いて

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

と表すことのできる. このとき, コーシー=リーマンの方程式とはいかなる条件下での偏微分方程式のことであるか説明しなさい.

問題 10. (各 5 点) 以下の指示を Maple を使用して行う場合, どのような命令 (コマンド) を入力すればよいか, その命令を書きなさい. 命令実行後の結果については不要. (例) 指示「 100 の階乗を求める 」 $\rightarrow$  解答「 100!; 」

- (1) sum 関数を利用し,  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$  を求める.
- (2) 自然対数関数  $\log x$  を微分する.
- (3)  $e^{-3x^2}$  を 2 回微分する (もしくは, 2 階の導関数を求める).
- (4)  $x^2 \sin x$  の不定積分を求める.
- (5) 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  を求める.
- (6)  $f(t) = at + b$  をラプラス変換する.
- (7)  $f(x)$  をフーリエ変換する.

問題 11. (各 10 点) 以下の指示を数式処理ソフト **Maple** を使用して行いなさい. また, その (すべての指示を実施した) ワークシートを「test\_学籍番号.mw」(例: test\_181w00875.mw) として保存し, 小テスト実施中に WebClass での指定ポスト (「確認小テストポスト」) から投函しなさい. 下記の指示以外の内容が入っているワークシートである場合には, 本問は 0 点とする.

- (1) 極座標系で  $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$  のグラフを描きなさい).
- (2)  $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot (-1)^k}{k} \sin kx$  のグラフ  $y = f(x)$  を  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲で描きなさい.