メモ：$2^n + y,\ 3^n - z$ の L 値について

2019.07.05　　山下 倫範

L を Euler('s torsion) 関数の導来対数関数とする．

命題 1. y_1 を $1 \leqq y_1 < 2^n$ として，$x_1 = 2^n + y_1$ を考えると，$L(x_1) \leqq n$ である。

証明.

$\because$　$L(x_1) > n$ とすれば，$x_1 \geqq 2^{n+1}$ でなければならないが，これは $x_1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ に反するからである．

次に，$1 \leqq y_2 < 2^n \cdot (2^2 - 1)$ として，$L(2^n + y_2)$ を考えてみよう。

命題 2. $1 \leqq y_2 < 2^n \cdot (2^2 - 1)$ として，$x_2 = 2^n + y_2$ を考えると，$L(x_2) \leqq n + 1$ である。

証明.

$\because$　$L(x_1) > n + 1$ とすれば，$x_1 \geqq 2^{n+2}$ でなければならないが，これは $x_1 < 2^n + 2^n \cdot (2^2 - 1) = 2^n(1 + (2^2 - 1)) = 2^{n+2}$ の矛盾を引き起こすからである。（証明終）

以上の考察から，次のことが主張される．

定理 3. $1 \leqq y_2 < 2^n(2^k - 1)$ として，$x_k = 2^n + y_k$ を考えると，$L(x_k) \leqq n + (k - 1)$ である。

同様の議論を，$3^n - z$ について試みよう。

命題 4. z_1 を $0 \leqq z_1 < 2 \cdot 3^{n-1}$ として，$x_1 = 3^n - z_1$ を考えると，$L(x_1) \geqq n$ である。

証明.

$\because$　仮に $L(x_1) < n$ とすれば，$x_1 \leqq 3^{n-1}$ でなければならないが，これは $x_1 > 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ に矛盾。

よって

定理 5. z_k を $0 \leqq z_k < (3^k - 1)3^{n-k}$ として，$x_k = 3^n - z_k$ を考えると，$L(x_k) \geqq n - (k - 1)$ である。

が主張できる。