計算メモ：Dedekind の modified ψ 関数でも生じる導来対数関数について 20230103

山下倫範 * 宮田大輔 † 藤田菜摘 ‡
立正大学 *，千葉商科大学 †，富士通 Japana‡

2023/01/03

1 はじめに

Dedekind の ψ 関数は自然数 $n = \prod_{i=i}^{s} p_i^{e_i}$ に対し次のように定義される．

$$\psi(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i-1}(p_i + 1)$$

これを次の素数 p および 1 に対しての関数 ψ_0 を用いて修正しよう．

$$\psi_0(p) = \begin{cases} 1 & (p = 1) \\ 1 & (p = 2) \\ \dfrac{p+1}{2} & (p > 2) \end{cases}$$

$$\Delta(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i-1}\psi_0(p_i)$$

ここで [3, 2] での命題

命題 1.1. (宮田ー山下)　$\mathcal{P}$ を数の集合とし $f :]\mathcal{P} \to \mathcal{N}$ を $1 \leqq f(p) < p \in \mathcal{P}$ であるような関数とし

$$\varphi_f(x) = x \prod_{i=1}^{r} \frac{f(p_i)}{p_i}$$

そして

$$L_{\varphi_f}(1) = 0$$
$$L_{\varphi_f}(x) = L_{\varphi_f}(\varphi_f(x)) + \#\{\ p \in f^{-1}(1) :\ p|x\ \}$$

とすれば

$$L_{\varphi_f}(xy) = L_{\varphi_f}(x) + L_{\varphi_f}(y)$$

ここで，件の ψ_0 を命題 1.1 での f に適用すれば，modified Dedekind 関数 Δ に対しても

$$L_{\varphi_\Delta}(xy) = L_{\varphi_\Delta}(x) + L_{\varphi_\Delta}(y)$$

を得，modified Dedekind 関数 Δ に対しても導来対数関数の関係を得られる．

参考文献

[1] M.Yamashita, D.Miyata: On the *abc* conjecture for a derived logarithmic function of the Euler function, Proceedings of 1th CCATS2015_IEEE(International Conference on Computer Application & TechnologieS 2015), Session #7(9.2), Kunibiki Messe(Matsue), 2015.8.31−9.2

[2] D.Miyata-M.Yamashita, Note on derived logarithmic functions of Euler's functions, Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Math. Soc. of Japan, 2004.9, (in Japanese)

[3] Miyata D.-Yamashita M., A generalization of Yamashita's note on derived logarithmic functions of Euler functions,2001.12.14 (unpublished)