計算メモ：
擬ゼータ関数について

山下倫範 * 宮田大輔 † 藤田菜摘 ‡
立正大学 *，千葉商科大学 †，富士通 Japan‡

2022/01/08

はじめに

筆者は山下 – 宮田 – 藤田 [1](§2.3) において，$\sum 1/f(n)^s$ という擬ゼータ関数を導入したが，本稿ではこの擬ゼータ関数について，その周辺を簡単に記述することを目的とする.

1 擬ゼータ関数

数論的関数 $f(n) \in \boldsymbol{N} \cup \{\ 0, -1\ \}$ に対し，条件

$$M_f(k) = \#N_f(k) = \{\ j \mid f(k) = j\ \} < \infty \qquad (\text{条件 f})$$

が仮定されるとき，数論的関数 $f(n)$ より生じる擬ゼータ関数を次のように定義しよう.

$$\zeta_f^*(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f(i)^s}$$

すると，次のディリクレ級数に置き換えられる

Proposition 1.1. 数論的関数 $f(n)$ より生じる擬ゼータ関数について，次の等式が成立する.

$$\zeta_f^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_f(n)}{n^s}$$

しかるに，ディリクレ級数同士の積は各ディリクレ級数の係数項同士の合成積（Convolution:積記号 $\circ$）に対応しているので次も成立している.（条件 f）を満たす数論的関数 f，g について

Proposition 1.2. 数論的関数 $f(n)$ より生じる擬ゼータ関数について，次の等式も成立する.

$$\zeta_f^*(s)\zeta_g^*(s) = \zeta_{M_f \circ M_g}^*(s)$$

参考文献

[1] 山下倫範 – 宮田大輔 – 藤田菜摘，Euler 関数の導来対数関数 $L(x)$ の諸相，地球環境研究第 22 号，立正大学地球環境科学部，2020.3，67−72