2018 年 8 月 20 日

平成３１年度（平成３０年度１０月入学を含む）
北海道大学大学院理学院自然史科学専攻
（地球惑星ダイナミクス講座，地球惑星システム科学講座，
および 地震学火山学講座）
博士前期（修士）課程入学試験

専門科目試験問題
試験時間 13：00 ～ 16：00

以下の注意事項をよく読むこと．

1. 問題冊子１冊（この冊子），解答用紙６枚, 草案紙２枚を配布する．
2. 専門科目試験の問題は, Ⅰ数学, Ⅱ 物理学, Ⅲ 化学, Ⅳ 地球科学Ⅰ（地球史・テクトニクス・堆積学），および Ⅴ 地球科学Ⅱ（岩石学・鉱物学・資源地質学）の５分野から出題される．このうち，２分野を選択して解答せよ．
3. 各分野の出題は，例えば Ⅱ－１，Ⅱ－２ のように，いくつかの問題からなる．解答の方法については，各分野の問題に与えられている指示をよく読むこと．
4. 解答は，Ⅱ－１，Ⅱ－２などの問題ごとに別々の解答用紙（1枚）を用い，指定された欄に，数学などの科目名，Ⅱ－１のように問題番号，そして受験番号を記入すること．氏名は記入しないこと．
5. 解答は解答用紙の裏面に及んでもよい．
6. 解答用紙，草案紙が足りないときは，試験監督者に申し出ること．
7. 解答用紙は選択した分野ごとに回収する．回収する解答用紙の枚数は，それぞれの分野で３枚ずつである．解答の如何に関わらず受験番号を記入し，これらの枚数の解答用紙を必ず提出すること．なお，３分野以上にわたって提出しないこと．
8. 問題冊子と草案紙，および余った解答用紙は持ち帰ってもよい．

Ｉ 数学

以下の４問（Ｉ－１，Ｉ－２，Ｉ－３，Ｉ－４）から３問を選択して解答せよ．解答にあたっては，結果だけでなく導出過程も記せ．

Ｉ－１（選択）

z を複素数として，以下の問題に解答せよ．

問題 1　定積分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ について，以下の問いに答えよ．

問 1　$z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ．

問 2　$z=e^{i\theta}$ とおくとき，定積分 I を z を用いて表せ．また，このときの積分路を複素平面上に示せ．

問 3　問 2 で得られた定積分 I の被積分関数の特異点をすべて求めよ．

問 4　以上の結果と留数定理を用いて，定積分 I を求めよ．

問題 2　複素関数 $f(z)=z^2\exp(1/z)$ は，$z=0$ のまわりで以下のようなローラン展開で表現できる：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$$

このとき，以下の問いに答えよ．

問 1　$f(z)$ を $z=0$ のまわりにローラン展開せよ．

問 2　$f(z)$ の $z=0$ における留数を求めよ．

Ｉ－２（選択）

関数 $x(t)$ および $y(t)$ に関する次の連立常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3x + 2y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x - 3y$$

について，以下の問題に解答せよ．

問題１　列ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $\mathbf{A}$ を用い，与えられた二つの微分方程式をまとめて，$\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{A}\mathbf{r}$ と表現する．このとき，以下の問いに答えよ．

問１　行列 $\mathbf{A}$ を求めよ．

問２　行列 $\mathbf{A}$ の固有値をすべて求め，それぞれに対応する正規化された固有ベクトルを求めよ．

問３　問２で求めた行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトルを，固有値の大きい順に列として並べた行列を $\mathbf{U}$ とする．$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ を示せ．なお，上付き添字 T は転置を示し，$\mathbf{I}$ は単位行列である．

問題２　問題１の $\mathbf{r}$ および $\mathbf{U}$ を用いて，$\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えよ．

問１　$\mathbf{q}$ に関する微分方程式を，問題１の行列 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{U}$ を用いて示せ．

問２　q_1 および q_2 に関する一般解を求めよ．

問３　x および y に関する一般解を求めよ．

問４　$t = 0$ での初期条件が $x(0) = \sqrt{2}$，$y(0) = -\sqrt{2}$，$\dot{x}(0) = 0$，$\dot{y}(0) = 0$（ただし，$\dot{x} = dx/dt$，$\dot{y} = dy/dt$）であるときの解 x および y を求めよ．

Ｉ－３（選択）

区間 $-\pi \le x \le \pi$ 上で定義される関数 $f(x)$ を式(1)のようなフーリエ級数に展開するとき，以下の問題に解答せよ．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

問題 1　m, n が正の整数のとき，積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ の値を求めよ．その際，$m = n$ の場合と $m \ne n$ の場合に分けて答えよ．

問題 2　式(1)の両辺に $\cos mx$（$m = 0, 1, 2, \cdots$）をかけて，x について $-\pi$ から π まで積分し，問題 1 の結果を利用することによって，係数 a_n（$n = 0, 1, 2, \cdots$）が $f(x)$ の積分を使って表される．このとき，以下の問いに答えよ．

問 1　$m = 0$ として，係数 a_0 を $f(x)$ の積分を使って表せ.

問 2　係数 a_n（$n = 1, 2, \cdots$）を $f(x)$ の積分を使って表せ.

問題 3　次の関数 $g(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$g(x) = x^2 \ (-\pi \le x \le \pi)$$

ただし，$g(x)$ は偶関数なので，係数 b_n（$n = 1, 2, \cdots$）は 0 である．

問題 4　問題 3 の結果を用いて，次の等式を示せ.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

I − 4（選択）

3次元空間でのベクトルに関する以下の問題に解答せよ．

問題1　スカラー関数 $f(x,y,z)$ に対し，$\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$ を示せ．

問題2　二つのベクトル $\mathbf{a}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\mathbf{b}=(3,\sqrt{3},0)$ のなす角 θ $(0\le\theta\le\pi/2)$ を求めよ．

問題3　ベクトル $\mathbf{v}=(1,2,1)$ を，x 軸のまわりで時計回りの方向に $\pi/2$ だけ回転させる（z 軸を y 軸の方向に回す）．ただし，座標系は右手系とする．この時の回転行列 $\mathbf{R}$ を示し，回転後のベクトル $\mathbf{u}=\mathbf{R}\mathbf{v}$ を求めよ．また，二つのベクトル $\mathbf{v}$ と $\mathbf{u}$ が直交するか，答えよ．

問題4　関数 $\phi(x,y,z)=2x^2y^3+yz+z^2$ と，その勾配で定義されるベクトル場 $\mathbf{B}=\nabla\phi$ を用いて，次のガウスの定理

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV=\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{1}$$

を考える．ここで，閉曲面 S は領域 V の境界であり，$\mathbf{n}$ は S の内から外へ向かう単位法線ベクトルである．以下の問いに答えよ．

問1　$\mathbf{B}$ を求めよ．

問2　各辺の長さが1で，原点 $(0,0,0)$ を頂点の一つとする立方体の領域 V（$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$）に対し，式 (1) 左辺を求めよ．

問3　問2の領域 V の表面を閉曲面 S として，式 (1) 右辺を求めよ．