平成２６年１１月７日

山本（宗一）の不等式[†]について

山本宗一氏の訃報に接し，彼を偲んで本不等式を紹介しておく。(2014 年 11 月 8 日)

山本の不等式． $n \geqq p \geqq 0,\ a_{ij} \geqq 0$ について，次の不等式が成立する。

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p} \geqq \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{p}$$

証明. （当時の山本宗一氏による証明）

まず，$A_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{n}\right)^{1/n}}$ とおけば，$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_{ij}^{n} = 1$ である。

n 次の相加相乗平均の不等式から，$A_{1j}^{n} + A_{2j}^{n} + \cdots + A_{nj}^{n} \geqq nA_{1j}A_{2j}\cdots A_{nj}$.　ここで，両辺の $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}$ をとって

$$\sum_{j=1}^{m} A_{1j}^{n} + \sum_{j=1}^{m} A_{2j}^{n} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} A_{nj}^{n} \geqq n\sum_{j=1}^{m} A_{1j}A_{2j}\cdots A_{nj}$$

よって

$$1 \geqq \sum_{j=1}^{m} A_{1j}A_{2j}\cdots A_{nj} \geqq \left(\sum_{j=1}^{m} A_{1j}A_{2j}\cdots A_{nj}\right)^{n}.$$

すなわち

$$1 \geqq \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{1j}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1j}^{n}\right)^{1/n}} \times \frac{a_{2j}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{2j}^{n}\right)^{1/n}} \times \cdots \times \frac{a_{nj}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{nj}^{n}\right)^{1/n}}\right)^{n}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1j}^{n}\right)^{1/n}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{2j}^{n}\right)^{1/n}\cdots\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{nj}^{n}\right)^{1/n}}\right)^{n}.$$

これは以下のように同値変形されてゆく。

$$1 \geqq \frac{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{n}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{n}} \iff \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{n} \geqq \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{n} \qquad (*)$$

ここで，次の補題を用意しておく。

[†]山本宗一（1953.11.21−2014.8.10，名古屋大数学科 ⟶ 野村総研）氏が 1975 年（土佐高校 2 年）のときに示した。当時，月刊誌「大学への数学」でも，特別なケースについて山本宗一氏の投稿が紹介されていたと思う。

＜補題＞．　$1 \geqq r > 0,\quad x_j \geqq 0$　について，次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^r\right)^{1/r} \geqq \sum_{j=1} x_j$$

補題の証明.

m により帰納法を用いる。$m=1$ のときは，明らかに成立しており，$m-1$ までは OK とする。

$$f(x) = x^r + \sum_{j=2}^{m} x_j^r - \left(x + \sum_{j=2}^{m} x_j\right)^r$$ とおけば，$$f'(x) = r\left(x^{r-1} - \left(x + \sum_{j=2}^{m} x_j\right)^{r-1}\right)$$ であり，

$1 \geqq r > 0$　より，$f'(x) > 0$　である。

よって，$f(x)$　は単調増加であり，帰納法の仮定（$m-1$ まで OK）から

$$f(0) = \sum_{j=2}^{m} x_j^r - \left(\sum_{j=2}^{m} x_j\right)^r \geqq 0$$

であるので，$x \geqq 0$ で　$f(x) \geqq 0$ が成り立つ。ここで，$x = x_1$ とおけば，余不等式が成立する。 ■

ここで，$(*)$ の右側の不等式において，a_{ij} を $a_{ij}^{p/n}$ で置き換えれば，

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^p \geqq \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{p/n}\right)^n = \left(\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{p/n}\right)^{n/p}\right)^p$$

この右辺は，$1 \geqq p/n \geqq 0$ であることから，先ほどの補題を，$(\quad)^p$ の中に適用して

$$\left(\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{p/n}\right)^{n/p}\right)^p \geqq \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^p$$

以上のことから，与不等式は示された。 ■

山下のコメント.

一般のベクトル空間において，$\overrightarrow{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})$ の間に，

$$\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} \cdots \overrightarrow{x_n} = \sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} x_{ij}$$

と定義されるような内積 のようなもの が意味を持つようなものであれば，この不等式が有用になるのではと夢想する。