有理数上で定義される $3x+1$ 関数について
On the $3x + 1$ function defined on the rational numbers

山下倫範*
YAMASHITA Michinori
立正大学　地球環境科学部
Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho Univ.

2012.02.20，同年 10.01 追記

1　はじめに

このノートでは，整数上で議論されている $3x+1$ 関数を有理数上で定義した場合の振舞いについて記述する。有理数上での定義に関しては既に [2] で述べられているが初心者にはいささか牛刀割鶏の類であるので，以下に分かりやすく定義しておく。

まず，次の用語を準備しておく。

定義 1.1 (有理数の奇数と偶数)
既約分数表示された有理数 α が奇数（もしくは奇の有理数）であるとは，分母，分子ともに奇数であるときをいい，そうでないとき偶数（もしくは偶の有理数）であるという。α が偶数であれば，奇数 β によって $\alpha = 2^n\beta$ と表される。偶数 $\alpha = 2^n\beta$ において，α を 2 で割るとは，2 の冪指数 n が $n > 0$ のとき，$n-1$ となることをいい，$n < 0$ のとき，$n+1$ となることをいう。

これより，

定義 1.2 (有理数上の $3x+1$ 関数)
正有理数上の $3x+1$ 関数 f を次のように定めよう。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} & (\quad x \text{ が奇数} \quad) \\ x \quad \text{を 2 で割る} & (\quad x \text{ が偶数} \quad) \end{cases}$$

これは，自然数上の $3x+1$ 関数の正有理数上への自然な拡張となる。

定義 1.2 より，奇の正有理数の振舞いについて調べればよいことになる。しばらく，非整数の奇の正有理数の f による動きを見てみよう。

その前に，[3] で注意したように，奇の正有理数 x は奇の正有理数 α を用いて，$x = 2^e\alpha - 1 \quad (e > 1)$ の形で表すことにすれば，f^e の作用で，$f^e(x) = 3^e\alpha - 1$ と変化する。1 より小さい正有理数でし

*yamasita@ris.ac.jp，2012.02.24, 26 更新

ばらく f^* での変化を見ることにする。なお，1 より大きい奇の正有理数 $\alpha = \dfrac{q}{p}$ については，N として $2^N p > q$ となる最小自然数をとることにより，$\beta = \dfrac{q}{2^N p}$ は $F_{2^N p}$ に属する既約正有理数で，しかも $f^N(\beta) = \alpha$ となることから，実質 Farey 数列で確認すればよいこととなることに注意を払っておこう。以下の例で扱う対象有理数は，Farey 数列族 F_n において n の増加とともに新しく生成されてゆく正有理数として逐次確認してゆくものとする。ただし，$\dfrac{3}{4}$ のように，自然数 3 の扱いとなるもの，偶の正有理数で f^* によって既に確認された数および order n の小さい Farey 数列 F_n 内に現れたものについは省略する。

例 1.1 (F_{19} **の有理数** f^* **遷移)**

(1) $\dfrac{1}{3} = 2^2 \cdot \dfrac{1}{3} - 1 \longrightarrow 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 1 \longrightarrow 3^2 \cdot \dfrac{1}{3} - 1 = 2 \longrightarrow 1$

(2) $\dfrac{1}{5} = 2 \cdot \dfrac{3}{5} - 1 \longrightarrow 3^2 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \dfrac{1}{5}$

(3) $\dfrac{3}{5} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 = \boxed{\dfrac{22}{5}} \longrightarrow \dfrac{11}{5} = 2^4 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 \longrightarrow 3^4 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 = \dfrac{76}{5}$

$\Longrightarrow \dfrac{19}{5} = 2^3 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 \Longrightarrow 3^4 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 = \dfrac{76}{5} \sim \dfrac{19}{5}$

(4) $\dfrac{5}{6} \longrightarrow \dfrac{5}{3} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{3} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{3} - 1 = 2^3 \Longrightarrow 1$

(5) $\dfrac{1}{7} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{7} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{7} - 1 = \dfrac{20}{7} \Longrightarrow \dfrac{5}{7} = 2^2 \cdot 3 \dfrac{1}{7} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{7} - 1 = \dfrac{20}{7}$

$\Longrightarrow \dfrac{5}{7} = 2^2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{7} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{7} - 1 = \dfrac{20}{7} \sim \dfrac{5}{7}$

(6) $\dfrac{3}{7} = 2 \cdot \dfrac{5}{7} - 1 \longrightarrow 3 \cdot \dfrac{5}{7} - 1 = 2^3 \cdot \dfrac{1}{7} \Longrightarrow \dfrac{1}{7}$

(7) $\dfrac{1}{9} = 2 \cdot \dfrac{5}{9} - 1 \longrightarrow 3 \cdot \dfrac{5}{9} - 1 = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

(8) $\dfrac{5}{9} = 2 \cdot \dfrac{7}{9} - 1 \longrightarrow 3 \cdot \dfrac{7}{9} - 1 = \dfrac{7}{3} - 1 = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow \dfrac{1}{3}$

(9) $\dfrac{7}{9} = 2^4 \cdot \dfrac{1}{9} - 1 \Longrightarrow 3^4 \cdot \dfrac{1}{9} - 1 = 9 - 1 = 8 \sim 1$

(10) $\dfrac{7}{10} \longrightarrow \dfrac{7}{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{5} - 1 = \boxed{\dfrac{22}{5}}$

(11) $\dfrac{9}{10} \longrightarrow \dfrac{9}{5} = 2 \cdot \dfrac{7}{5} - 1 \Longrightarrow 3 \cdot \dfrac{7}{5} - 1 = 2^4 \cdot \dfrac{1}{5} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{5}}$

(12) $\dfrac{1}{11} = 2^2 \cdot \dfrac{3}{11} - 1 \Longrightarrow 3^3 \cdot \dfrac{1}{11} - 1 = 2^4 \cdot \dfrac{1}{11} \sim \dfrac{1}{11}$

(13) $\dfrac{3}{11} = 2\cdot\dfrac{7}{11} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{7}{11} - 1 = \dfrac{10}{11} \longrightarrow \dfrac{5}{11} = 2^4\cdot 3\dfrac{1}{11} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{11} - 1 = \dfrac{70}{11}$
$\longrightarrow \dfrac{35}{11} = 2\cdot\dfrac{23}{11} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{23}{11} - 1 = \dfrac{58}{11} \longrightarrow \dfrac{29}{11} = 2^3\cdot\dfrac{5}{11} - 1 \Longrightarrow 3^3\cdot\dfrac{5}{11} - 1$
$= 2^2\cdot\dfrac{31}{11} \Longrightarrow 2\cdot 3\cdot\dfrac{7}{11} - 1 \longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{7}{11} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{13}{11} \Longrightarrow \dfrac{13}{11} = 2^3\cdot 3\cdot\dfrac{1}{11} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{11} - 1$
$= 2\cdot\dfrac{35}{11} \longrightarrow \dfrac{35}{11}$

(14) $\dfrac{7}{11} = 2\cdot 3^2\cdot\dfrac{1}{11} - 1 \longrightarrow 3^3\cdot\dfrac{1}{11} - 1 = 2^4\cdot\dfrac{1}{11} \Longrightarrow \dfrac{1}{11}$

(15) $\dfrac{9}{11} = 2^2\cdot\dfrac{5}{11} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{11} - 1 = 2\cdot\dfrac{17}{11} \longrightarrow \dfrac{17}{11} = 2^2\cdot\dfrac{7}{11} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{7}{11} - 1$
$= 2^2\cdot\dfrac{13}{11} \Longrightarrow \dfrac{13}{11}$

(16) $\dfrac{5}{12} \longrightarrow \dfrac{5}{6}$

(17) $\dfrac{7}{12} \Longrightarrow \dfrac{7}{3} = 2\cdot\dfrac{5}{3} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{5}{3} - 1 = 2^3 \Longrightarrow 1$

(18) $\dfrac{11}{12} \Longrightarrow \dfrac{11}{3} = 2\cdot\dfrac{7}{3} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{7}{3} - 1 = 6$

(19) $\dfrac{1}{13} = 2\cdot\dfrac{7}{13} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{7}{13} - 1 = 2^3\cdot\dfrac{1}{13} \Longrightarrow \dfrac{1}{13}$

(20) $\dfrac{3}{13} = 2^4\cdot\dfrac{1}{13} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{13} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{17}{13} \longrightarrow \dfrac{17}{13} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{5}{13} - 1 \longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{13} - 1$
$= 2^5\cdot\dfrac{1}{13} \Longrightarrow \dfrac{1}{13}$

(21) $\dfrac{5}{13} = 2\cdot 3^2\cdot\dfrac{1}{13} - 1 \longrightarrow 3^3\cdot\dfrac{1}{13} - 1 = 2\cdot\dfrac{7}{13} \longrightarrow \dfrac{7}{13} = 2^2\cdot\dfrac{5}{13} - 1 \longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{13} - 1$
$= 2^5\cdot\dfrac{1}{13} \Longrightarrow \dfrac{1}{13}$

(22) $\dfrac{9}{13} = 2\cdot\dfrac{11}{13} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{11}{13} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{5}{13} \longrightarrow \dfrac{5}{13}$

(23) $\dfrac{11}{13} = 2^3\cdot 3\cdot\dfrac{1}{13} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{13} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{17}{13} \Longrightarrow \dfrac{17}{13} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{13}}$

(24) $\dfrac{9}{14} = \dfrac{9}{7} = 2^4\cdot\dfrac{1}{7} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{7} - 1 = 2\cdot\dfrac{37}{7} \longrightarrow \dfrac{37}{7} = 2^2\cdot\dfrac{11}{7} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{11}{7} - 1 =$
$2^2\cdot\dfrac{23}{7} \Longrightarrow \dfrac{23}{7} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{5}{7} - 1 \longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{7} - 1 = 2\cdot\dfrac{19}{7} \longrightarrow \dfrac{19}{7} = 2\cdot\dfrac{13}{7} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{13}{7} - 1$
$= 2^5\dfrac{1}{7} \Longrightarrow \dfrac{1}{7}$

(25) $\dfrac{11}{14} = \dfrac{11}{7} = 2\cdot 3^2\cdot\dfrac{1}{7} - 1 \Longrightarrow 3^3\cdot\dfrac{1}{7} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{5}{7} \longrightarrow \boxed{\dfrac{5}{7}}$

(26) $\dfrac{13}{14} = \dfrac{13}{7} = 2^2\cdot\dfrac{5}{7} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{7} - 1 = 2\cdot\dfrac{19}{7} \longrightarrow \dfrac{19}{7} = 2\cdot\dfrac{13}{7} - 1 \Longrightarrow 3\cdot\dfrac{13}{7} - 1 =$

$2^5\cdot\dfrac{1}{7} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{7}}$

(27) $\dfrac{1}{15} = 2^4\cdot\dfrac{1}{15} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{15} - 1 = 3^3\cdot\dfrac{1}{5} - 1 = 2\cdot\dfrac{11}{5} \longrightarrow \dfrac{11}{5} = 2^4\cdot\dfrac{1}{5} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{5} - 1$

$= 2^2\cdot\dfrac{19}{5} \Longrightarrow \dfrac{19}{5} \quad \because\ (3)$

(28) $\dfrac{7}{15} = 2\cdot\dfrac{11}{15} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{11}{15} - 1 = \dfrac{11}{5} - 1 = \dfrac{6}{5} \Longrightarrow \dfrac{3}{5}$

(29) $\dfrac{11}{15} = 2\cdot\dfrac{13}{15} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{13}{15} - 1 = \dfrac{24}{15} \Longrightarrow \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

(30) $\dfrac{13}{15} = 2^2\cdot\dfrac{7}{15} - 1 \longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{7}{15} - 1 = \dfrac{48}{15} \Longrightarrow \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

(31) $\dfrac{1}{17} = 2\cdot 3^2\cdot\dfrac{1}{17} - 1 \longrightarrow 3^3\cdot\dfrac{1}{17} - 1 = \dfrac{10}{17} \longrightarrow \dfrac{5}{17} = 2\cdot\dfrac{11}{17} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{11}{17} - 1$

$= 2^4\cdot\dfrac{1}{17} \Longrightarrow \dfrac{1}{17}$

(32) $\dfrac{3}{17} = 2^2\cdot\dfrac{5}{17} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{5}{17} - 1 = \dfrac{28}{17} \Longrightarrow \dfrac{7}{17} = 2^3\cdot 3\cdot\dfrac{1}{17} - 1 \Longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{17} - 1$

$= 2^6\cdot\dfrac{1}{17} \Longrightarrow \dfrac{1}{17}$

(33) $\dfrac{5}{17} = 2\cdot\dfrac{11}{17} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{11}{17} - 1 = 2^4\cdot\dfrac{1}{17} \Longrightarrow \dfrac{1}{17}$

(34) $\dfrac{7}{17} = 2\cdot\dfrac{11}{17} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{11}{17} - 1 = 2^4\cdot\dfrac{1}{17} \Longrightarrow \dfrac{1}{17}$

(35) $\dfrac{9}{17} = 2\cdot\dfrac{13}{17} - 1 \longrightarrow 3\cdot\dfrac{13}{17} - 1 = 2\cdot\dfrac{11}{17} \Longrightarrow \dfrac{11}{17} = 2^2\cdot\dfrac{7}{17} - 1 = 3^2\cdot\dfrac{7}{17} - 1$

$= \dfrac{48}{17} \Longrightarrow \dfrac{3}{17}$

(36) $\dfrac{11}{17} = 2^2\cdot\dfrac{7}{17} - 1 \Longrightarrow 3^2\cdot\dfrac{7}{17} - 1 = \boxed{2\cdot\dfrac{23}{17}} \Longrightarrow \dfrac{23}{17} = 2^3\cdot 5\cdot\dfrac{1}{17} - 1 = 3^3\cdot\dfrac{5}{17} - 1$

$= \dfrac{118}{17} \longrightarrow \dfrac{59}{17} = 2^2\cdot\dfrac{19}{17} - 1 \longrightarrow 3^2\dfrac{19}{17} - 1 = 2\cdot\dfrac{77}{17} \Longrightarrow \dfrac{77}{17} = 2\cdot\dfrac{47}{17} - 1 \longrightarrow$

$3\cdot\dfrac{47}{17} - 1 = 2^2\cdot\dfrac{31}{17} \Longrightarrow \dfrac{31}{17} = 2^4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{17} - 1 \Longrightarrow 3^5\cdot\dfrac{1}{17} - 1 = \boxed{2\cdot\dfrac{113}{17}} \Longrightarrow \dfrac{113}{17}$

$$= 2\cdot\frac{65}{17}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{65}{17}-1 = 2\cdot\frac{89}{17} \longrightarrow \frac{89}{17} = 2\cdot\frac{53}{17}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{53}{17}-1 = 2\cdot\frac{71}{17} \longrightarrow$$

$$\frac{71}{17} = 2^3\cdot\frac{11}{17}-1 \Longrightarrow 3^3\cdot\frac{11}{17}-1 = 2^3\cdot\frac{35}{17} \Longrightarrow \frac{35}{17} = 2^2\cdot\frac{13}{17}-1 \Longrightarrow 3^2\cdot\frac{13}{17}-1$$

$$= 2^2\cdot\frac{25}{17} \Longrightarrow \frac{25}{17} = 2\cdot 3\cdot\frac{7}{17}-1 \longrightarrow 3^2\cdot\frac{7}{17}-1 = \boxed{2\cdot\frac{23}{17}}$$

(37) $$\frac{13}{17} = 2\cdot\frac{15}{17}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{15}{17}-1 = 2^2\cdot\frac{7}{17} \Longrightarrow \boxed{\frac{7}{17}}$$

(38) $$\frac{15}{17} = 2^5\cdot\frac{1}{17}-1 \longrightarrow 3^5\cdot\frac{1}{17}-1 = \boxed{2\cdot\frac{113}{17}} \Longleftarrow \frac{11}{17}$$

(39) $$\frac{11}{18} \longrightarrow \frac{11}{9} = 2^2\cdot\frac{5}{9}-1 \Longrightarrow 3^2\cdot\frac{5}{9}-1 = 4 \Longrightarrow 1$$

(40) $$\frac{13}{18} \longrightarrow \frac{13}{9} = 2\cdot\frac{11}{9}-1 \Longrightarrow 3\cdot\frac{11}{9}-1 = 2^3\cdot\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{3}}$$

(41) $$\frac{17}{18} \longrightarrow \frac{17}{9} = 2\cdot\frac{13}{9}-1 \Longrightarrow 3\cdot\frac{13}{9}-1 = 2\cdot\frac{5}{3} \longrightarrow \frac{5}{3} = 2^3\cdot\frac{1}{3}-1 \Longrightarrow 3^3\cdot\frac{1}{3}-1$$

$$= 2^3 \Longrightarrow 1$$

(42) $$\frac{1}{19} = 2^2\cdot\frac{5}{19}-1 \Longrightarrow 3^2\cdot\frac{5}{19}-1 = 2\cdot\frac{13}{19} \Longrightarrow \frac{13}{19} = 2^5\cdot\frac{1}{19}-1 \Longrightarrow 3^5\cdot\frac{1}{19}-1$$

$$= 2^5\cdot\frac{7}{19} \Longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}} = 2\cdot\frac{13}{19}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{13}{19}-1 = 2^2\cdot\frac{5}{19} \Longrightarrow \frac{5}{19} = 2^3\cdot 3\cdot\frac{1}{19}-1 \Longrightarrow$$

$$3^4\cdot\frac{1}{19}-1 = 2\cdot\frac{31}{19} \Longrightarrow \frac{31}{19} = 2\cdot\frac{25}{19}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{25}{19}-1 = 2^3\cdot\frac{7}{19} \Longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}}$$

(43) $$\frac{3}{19} = 2\cdot\frac{11}{19}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{11}{19}-1 = \frac{14}{19} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}}$$

(44) $$\frac{3}{19} = 2\cdot\frac{11}{19}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{11}{19}-1 = 2\cdot\frac{7}{19} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}}$$

(45) $$\frac{5}{19} = 2^3\cdot 3\cdot\frac{1}{19}-1 \Longrightarrow 3^4\cdot\frac{1}{19}-1 = 2\cdot\frac{31}{19} \longrightarrow \boxed{\frac{31}{19}} = 2\cdot\frac{25}{19}-1 \longrightarrow 3\cdot\frac{25}{19}-1 =$$

$$2^3\cdot\frac{7}{19} \Longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}}$$

(46) $$\frac{9}{19} = 2^2\cdot\frac{7}{19}-1 \Longrightarrow 3^2\cdot\frac{7}{19}-1 = 2^2\cdot\frac{11}{19} \Longrightarrow \boxed{\frac{11}{19}} = 2\cdot 3\cdot\frac{5}{19}-1 \longrightarrow 3^2\cdot\frac{5}{19}-1 =$$

$$2\cdot\frac{13}{19} \longrightarrow \boxed{\frac{13}{19}} = 2^5\cdot\frac{1}{19}-1 \Longrightarrow 3^5\cdot\frac{1}{19} = 2^5\cdot\frac{7}{19} \Longrightarrow \boxed{\frac{7}{19}}$$

(47) $\dfrac{15}{19}=2\cdot\dfrac{17}{19}-1\longrightarrow 3\cdot\dfrac{17}{19}-1=2^5\cdot\dfrac{1}{19}\Longrightarrow\boxed{\dfrac{1}{19}}$

(48) $\dfrac{17}{19}=2^2\cdot 3^2\cdot\dfrac{1}{19}-1\longrightarrow 3^4\cdot\dfrac{1}{19}-1=2\cdot\dfrac{31}{19}\longrightarrow\boxed{\dfrac{31}{19}}$

2　正有理数上での基本的性質

自然数上での $3x+1$ 関数に関して導入した $(e,\ k)$ の定義を正有理数に対しても導入しよう（[1], [3]）。

記法 2.1 (奇の正有理数の表記)
e を非負整数，$p,\ q$ が奇の自然数のとき，$(e,\ p,\ q)$ もしくは $\left(e,\ \dfrac{q}{p}\right)$ で，$2^e\cdot\dfrac{q}{p}-1$ を表すものとする。

記法 2.2 ($\alpha\overset{f}{\sim}\beta$)
正有理数 $\alpha,\ \beta$ について，$\alpha\overset{f}{\sim}\beta$ とは，ある $e,\ e'\geqq 0$ で $f^e(\alpha)=f^{e'}(\beta)$（ただし，$f^0(x)=x$）であるときをいう。

命題 2.1 ($(e,\ \alpha)$ の基本命題)
正有理数 $\left(e,\ \dfrac{q}{p}\right)$ について，

$$\{\ e\equiv 1\quad\text{かつ}\quad pq\equiv 1\pmod 4\ \}\quad\text{もしくは}\quad\{\ e\equiv 0\quad\text{かつ}\quad pq\equiv 3\pmod 4\ \}$$

であれば，

$$\left(e,\ \frac{q}{p}\right)\overset{f}{\sim}\left(e+1,\ \frac{q}{p}\right)$$

である。

（証明）
まず，

$$f^e\left(\left(e,\ \frac{q}{p}\right)\right)\longrightarrow 3^e\cdot\frac{q}{p}-1=\frac{3^eq-p}{p},\qquad f^{e+1}\left(\left(e+1,\ \frac{q}{p}\right)\right)=3^{e+1}\cdot\frac{q}{p}-1=\frac{3^{e+1}q-p}{p}$$

であることを確認しておく。次に，以下 $\equiv$ については　mod 4 とすれば，
前者の場合，
$3^eq-p\equiv 3q-p\equiv 3p^2q-p\equiv 3(pq)p-p\equiv 3p-p\equiv 2p\equiv 2$　,
$3^{e+1}q-p\equiv q-p\equiv p^2q-p\equiv (pq)p-p\equiv p-p\equiv 0$
後者の場合も，
$3^eq-p\equiv q-p\equiv p^2q-p\equiv (pq)p-p\equiv 3p-p\equiv 2p\equiv 2$　,
$3^{e+1}q-p\equiv 3q-p\equiv 3p^2q-p\equiv 3(pq)p-p\equiv p-p\equiv 0$　　となり，
いずれの場合であっても

$$3^eq-p\equiv 2,\quad 3^{e+1}q-p\equiv 0$$

が成立している。　このことより，

$$f^{e+2}\left(\left(e,\ \frac{q}{p}\right)\right) = f\left(\frac{3^e q - p}{2p}\right) = \frac{3\cdot\dfrac{3^e q - p}{2p} + 1}{2} = \frac{3^{e+1} q - p}{4p}$$

また，

$$f^{e+3}\left(\left(e+1,\ \frac{q}{p}\right)\right) = f^2\left(\frac{3^{e+1} q - p}{p}\right) = \frac{3^{e+1} q - p}{4p}$$

であるので

$$f^{e+2}\left(\left(e,\ \frac{q}{p}\right)\right) = f^{e+3}\left(\left(e+1,\ \frac{q}{p}\right)\right) \quad \text{より} \quad \left(e+1,\ \frac{q}{p}\right) \overset{f}{\sim} \left(e+1,\ \frac{q}{p}\right)$$

∎

参考文献

[1] Yamashita M., Note on the behaviour of $(e,\ k)$, (unpublished), 1982.10.10.

[2] Lagarias J., The 3x+1 problem and its generalizations, Amer. Math. Monthly, Vol.92 (1985) 3-23

[3] Yamashita M., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties, Proceedding of Autum meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1995.9.

[4] Yamashita M., Tomonga S., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties (2), Proceedding of Annual meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1996.4.

[5] 大平麗子ー山下倫範，Collatz 問題の一般化について，パソコンリテラシ，第 31 巻第 4 号,（社）パーソナルコンピュータユーザ利用技術協会，2006.4,pp.16-21