擬付値環と準付値環について

On quasi-valuation rings and prevaluation rings

山下　倫範

YAMASHITA Michinori

環 W の整閉包を $\widetilde{W}$，商体 $Q(W)$ を K としたとき，任意の元 $x \in K$ に対して，$x \in W \vee x^{-1} \in \widetilde{W}$ が成り立つとき，W を K の準付値環（prevaluation ring）という（山下，1982）．このとき，$V = \widetilde{W}$ は付値環となり，W は V に支配される準付値環という．半正規環（semi-normal ring）の典型例である．

ある意味で，付値環 $\Longleftrightarrow$ 素イデアル，準付値環 $\Longleftrightarrow$ 準素イデアルの対応が考えられ，特に Noether 的・１次元的なところでは双対的な関係が成立する．

簡単な例

L/K を代数的とし，

$W = \mathrm{K} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{L}[[\mathrm{X}]]$　とすれば，W は準付値環である．

山下の定義（1982）した擬付値環（quasi-valuation ring），準付値環（prevaluation ring）について，以下簡単に基本的性質について復習していこう．(不定期に更新予定)

定義 1. 擬局所環 $(W,\ \mathfrak{n})$ が（同じ商体 $\mathcal{Q}(W) = \mathcal{Q}(V)$ を持つ）付値環 $(V,\ \mathfrak{m})$ に支配され，次の性質を満足するとき，

$$x \in W \quad \text{もしくは} \quad x^{-1} \in V$$

W を V に支配される擬付値環（*quasi-valuation ring*）という．

命題 1. $(W,\ \mathfrak{n})$ が $(V,\ \mathfrak{m})$ に支配される擬付値環であれば，$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ である．逆に V に支配される局所環 $(W,\ \mathfrak{n})$ において $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ であれば，W は V に支配される擬付値環である。

$\because$　$x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{n}$ をとると，支配されていることと取り方から $x \notin W$ である．このとき擬付値環の定義から，$x^{-1} \in V$．ところが，$x \in \mathfrak{m} \subsetneqq V$ より，x が V 内で正則元となって矛盾．よって $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ である．逆は明らか．$\square$

補題 1. $(W,\ \mathfrak{n})$ が $(V,\ \mathfrak{m})$ に支配される擬付値環であれば，W と V の中間環も擬付値環である．

定義 2. 擬局所環 $(W,\ \mathfrak{n})$ について,，次の性質を満足するとき

$$x \in W \quad \text{もしくは} \quad x^{-1} \in \widetilde{W}$$

W を準付値環（*prevaluation ring*）という．

定義から次の命題は自明である．

命題 2. 準付値環は擬付値環である．

$\because$　$\widetilde{W}$ が付値環であることを示せばよい．$x \notin \widetilde{W}$ をとると，準付値環の定義より，$x^{-1} \in W \subsetneqq \widetilde{W}$．すなわち，$\widetilde{W}$ は付値環の定義を満たす．□
命題 1 より次の基本的性質も有する．

命題 3. $R \subseteq V = (V, \mathfrak{m})$ とし，V を $\mathcal{Q}(R) = \mathcal{Q}(V) = K$ なる付値環とする．

(1) $R \subseteq R' \subseteq V$ なる局所環 R' で，$\mathfrak{m} \subseteq R'$ であれば R' も V に支配される擬付値環である

(2) W_λ が V に支配される擬付値環であれば，$\cap W_\lambda$ も V に支配される擬付値環である．特に，V に支配される擬付値環の中に包含関係で最小の擬付値環が存在する．

(3) W が V の擬付値環で，L が K の部分体であれば，$L \cap W$ は付値環 $L \cap V$ に支配される擬付値環である．

(4) W が V の擬付値環，$\mathfrak{q}$ を W の素イデアルとすれば，V で $\mathfrak{q}$ の上にある V の素イデアルは $\mathfrak{q}$ である．

(5) W が V の擬付値環，$\mathfrak{q}$ を W の素イデアルとすれば，$W/\mathfrak{q}$，$W_\mathfrak{q}$ もそれぞれ $V/\mathfrak{q}$，$V_\mathfrak{q}$ の擬付値環である．

$\because$

(1) 命題 1 より自明．□

(2) W_λ が $V = (V,\ \mathfrak{m})$ に支配される擬付値環であれば，$W_\lambda = (W_\lambda,\ \mathfrak{m})$ であるので，$\cap W_\lambda = (\cap W_\lambda,\ \mathfrak{m})$ も V に支配される擬付値環となる．すべての λ を動かせば，それが最小の擬付値環を構成する．□

(3) 略．□

(4) 略．□

(5) 略．□

ここに，V_λ で整域 R を含むすべての付値環とすると，$\cap V_\lambda$ が R の整閉包 $\widetilde{R}$ を表すが，では，付値環を擬付値環や準付値環で置き換えた場合はどのようになるであろうか．

1 次元 Noether 整域の状況を見てみよう。

まず，

記号 1. W_λ を R を含むすべての擬付値環とし，$R^{\#} = \cap W_\lambda$．

と記号を定めておこう．

$R = (R,\ \mathfrak{m})$ が単枝的（unibranch）の場合は，$\widetilde{R} = (\widetilde{R},\ \widetilde{\mathfrak{m}})$ が（離散）付値環であることから，R を含んで $\widetilde{R}$ に支配される最小の擬付値環は $W = \{\ x \mid x \bmod \widetilde{\mathfrak{m}} \in R/\mathfrak{m}\}$ であるので，$R^{\#} = W = R + \mathfrak{m}$ である．また，一般に R が Noether 環の場合，$\widetilde{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathrm{R}})$ に対して，関数体 $k(\widetilde{\mathfrak{p}})$ は関数体 $k(R \cap \widetilde{\mathfrak{p}})$ の有限次代数拡大であるので，この場合，擬付値環は準付値環となってい

る．

では，$R=(R,\ \mathfrak{m})$ が分岐する場合を考えてみよう．

$\mathfrak{m}$ が 2 個に分岐したとしよう．すなはち，$\widetilde{R}=(\widetilde{R},\ \widetilde{\mathfrak{m}_1},\ \widetilde{\mathfrak{m}_2})$ とする．簡単のため，2 つの（離散）付値環 $(\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_1},\ \widetilde{\mathfrak{m}}_1\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_1})$，$(\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2},\ \widetilde{\mathfrak{m}}_2\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2})$ をそれぞれ (V_1,M_1)，(V_2,M_2) としておく．ここで，

$$W_1=\{\ x\in V_1 \mid x \bmod M_1\in R/\mathfrak{m}\}\quad,\quad W_2=\{\ x\in V_2 \mid x \bmod M_2\in R/\mathfrak{m}\}$$

はそれぞれ R を含む（V_j に支配される）最小の準付値環である．したがって，$R^{\#}=W_1\cap W_2$．

W_j は構成方法から $W_j=R+M_j=R+\widetilde{\mathfrak{m}}_j\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_j}$ である．特に，$\widetilde{R}\cap W_j$ においては，$\widetilde{R}\cap W_j=R+\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ である．

最後の等式は，$x\in R+\widetilde{\mathfrak{m}}_j\widetilde{R}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_j}$ をとると，$x=r+\dfrac{m}{s}$ $\left(x\in\widetilde{R},\ r\in R,\ m\in\widetilde{\mathfrak{m}}_j,\ s\in\widetilde{R}\backslash\widetilde{\mathfrak{m}}_j\right)$ とおけるが，$s(x-r)=m\in\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ と $s\notin\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ より，$x-r\in\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ となって，$x=r+m'$ $\left(r\in\widetilde{R},\ m'\in\widetilde{\mathfrak{m}}_j\right)$ と整形される．

したがって，$R^{\#}=W_1\cap W_2$ を考察する際には，$W_1\cap W_2\subseteq V_1\cap V_2=\widetilde{R}$ であることから，$R^{\#}=(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)\cap(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)$ としてよい．

ここで，次のような自然な写像を考える．

$$(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)/\widetilde{\mathfrak{m}}_1\oplus(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)/\widetilde{\mathfrak{m}}_2\hookrightarrow\widetilde{R}/\widetilde{\mathfrak{m}}_1\oplus\widetilde{R}/\widetilde{\mathfrak{m}}_2\ ,\qquad \widetilde{R}/(\widetilde{\mathfrak{m}}_1\cap\widetilde{\mathfrak{m}}_2)\cong\widetilde{R}/\widetilde{\mathfrak{m}}_1\oplus\widetilde{R}/\widetilde{\mathfrak{m}}_2$$

また，φ で，標準写像 $\varphi\ :\ \widetilde{R}\longrightarrow\widetilde{R}/(\widetilde{\mathfrak{m}}_1\cap\widetilde{\mathfrak{m}}_2)$ とすれば，

$$\varphi^{-1}\left(\ (R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)/\widetilde{\mathfrak{m}}_1\oplus(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)/\widetilde{\mathfrak{m}}_2\ \right)=(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)\cap(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)=R^{\#}$$

ここに

$$R^{\#}=(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)\cap(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)\longrightarrow(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_1)/\widetilde{\mathfrak{m}}_1\oplus(R+\widetilde{\mathfrak{m}}_2)/\widetilde{\mathfrak{m}}_2$$

は全射である．

よって

$$\widetilde{\mathfrak{m}}'_j=R^{\#}\cap\widetilde{\mathfrak{m}}_j\quad \text{は}\quad R^{\#}\quad \text{の極大イデアルであり，さらに}\quad \widetilde{\mathfrak{m}}'_1\neq\widetilde{\mathfrak{m}}'_2\text{である．}$$

このことは，R が 1 次元 Noether 整域であるときには，$W_j=R+\widetilde{\mathfrak{m}}_j$ であると同時に $R^{\#}=(R^{\#},\ \widetilde{\mathfrak{m}}'_1,\ \widetilde{\mathfrak{m}}'_2)$ を示し，R から $R^{\#}$ へは，極大イデアルの関数体は拡大せず，$R^{\#}$ から $\widetilde{R}$ へは，極大イデアルは分岐しないことを主張している．

いま分岐が $n=2$ の場合を示したが，$n>2$ においても同様の議論で片付く．