Collatz 問題の一般化について
A generalization of the Collatz problem

大平 麗子，山下倫範
OHIRA Reiko, YAMASHITA Michinori

1 はじめに

表題の Collatz 問題とはドイツの数学者 Lothar Otto Collatz 教授（1910-1990）によって提起された（1932 年 7 月 1 日の教授のノートによる）とされるもので，現在では次のように整形された問題である。自然数上の関数 $f(x)$（以下，Collatz 関数という）が次のように定義されたとき，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & (x\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3x+1}{2} & (x\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$\forall x \quad \exists n \quad f^n(x) = 1$ となるかという問題である。Collatz 問題を例を用いて説明すると次のようになる。
$x = 3$ のとき，

$3 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
$x = 31$ のとき

$31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 182 \to 91 \to 137 \to 206 \to 103 \to 155 \to 233 \to 350 \to 175 \to 263 \to 395 \to 593 \to 890 \to 445 \to 668 \to 334 \to 167 \to 251 \to 377 \to 566 \to 283 \to 425 \to 638 \to 319 \to 479 \to 719 \to 1079 \to 1619 \to 2429 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 1367 \to 2051 \to 3077 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 866 \to 433 \to 650 \to 325 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 92 \to 46 \to 23 \to 35 \to 53 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$x = 3$ の場合は 5 回目で 1 に辿り着く。また，$x = 31$ の場合は 67 回目で 1 に辿り着く。このように代入する x の値によって，1 に辿り着くまでに要する回数は様々であるが，すべての自然数でこのようなことが成り立つだろうか？ということである。現在では，Collatz 問題といわれるよりも $3x+1$ 問題と呼ばれることのほうが多くなっているが，70 年余りを経た今でも，尚オープン（未解決）のままである。

筆者等は Collatz 問題にある種の一般化を施すことにより，その中で生ずる列の振舞いについて調べてみた。以下にその簡単な報告を行う。

2 Collatz 問題の一般化

Collatz 問題にアプローチするとき，自然数 x を $x = 2^e k - 1$ と表すことにすると（ただし，$e \geqq 0$ の整数，$k \geqq 1$ の奇数とする），この $x = 2^e k - 1$ は Collatz 関数 $f(x)$ に代入すると，$3 \cdot 2^{e-1} k - 1$ となる。更に，これを再度 Collatz 関数 f に代入すると，$3^2 \cdot 2^{e-2} k - 1$ となる。このように繰返し代入を行うと，最終的に e 回目で $f^e(x) = 3^e k - 1$ となることがわかる。つまり，このような変化の列（以下，Collatz 列という）

$$2^e k - 1 \to 3 \cdot 2^{e-1} k - 1 \to 3^2 \cdot 2^{e-2} k - 1 \to \ldots \to 3^e k - 1$$

において（[2] [3] [4]），3 の部分を，奇数 p で代用して，

$$2^e k - 1 \to p \cdot 2^{e-1} k - 1 \to p^2 \cdot 2^{e-2} k - 1 \to \ldots \to p^e k - 1$$

と変化してゆくように定義される関数を Collatz 関数のある一般化としてとらえてみよう。このような列を以下 p-Collatz 列ということにする。さらに，strict p-Collatz 列と呼ばれるものを次のような列としよう。$x = 2^e k - 1$ は $e-1$ 回目までは奇数列が繰り返され，e 回目に初めて偶数 $p^e k - 1$ となる。この $p^e k - 1$ は (2 のべき乗) $\times y$（y は奇数）と分解され，$3^e k - 1$ からの偶数列はやがて奇数 y となる。この $y = 2^{e'} k' - 1$ は，やがて偶数 $p^{e'} k' - 1$ となり，次の y' が得られる。こ

のようにして得られる $x \to y \to y' \to \cdots$ を strict p-Collatz 列とするのである。先の Collatz 列（3-Collatz 列）の例で示すと，
$x=3$ のときの strict 3-Collatz 列は
$3 \to 1$
$x=31$ のときの strict 3-Collatz 列は
$31 \to 121 \to 91 \to 103 \to 175 \to 445 \to 167 \to 283 \to 319 \to 911 \to 577 \to 433 \to 325 \to 61 \to 5 \to 1$
と縮小された列となる。さて，$p=3$ では必ず 1 に辿り着くことが予想されているが（Collatz 問題），もっと一般的に，p が 3 以外の場合についても考察対象としたものが，筆者等の定義する次の p-Collatz 問題である。

3 p-Collatz 問題

3.1 p-Collatz 関数 f_p の定義

p-Collatz 問題とは，任意の自然数 x に対して，

$$f_p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & (x \text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{px+(p-2)}{2} & (x \text{ が奇数のとき}) \\ & p \text{ は正の奇数}\end{cases}$$

と定義される p-Collatz 関数 f_p において，p-Collatz 列 $\{f_p^n(x)\}_{n=1,2,3,\ldots}$ もしくは strict p-Collatz 列がどのような振舞いをするかを問うものである。

Collatz 問題の一般化については種々考えられているが，筆者等は Collatz 列の変化に着目することによって，新しいアプローチを探ることができるのではないかと考え，計算機を用いて p-Collatz 列の振舞いを調べることとした。

3.2 p-Collatz 列の振舞い

p-Collatz 列は，次の 3 通りのいずれかに分類される。

(1) 必ず 1 に辿り着く

(2) 途中からループ列に入る

(3) 無限に発散してゆく

ここで言うループとは，p-Collatz 列の繰返しのことである。具体例（strict p-Collatz 列）を挙げて説明すると，
$p=5$, $x=555$ の場合
$555 \to 1389 \to 1737 \to 543 \to 1359 \to 3399 \to 8499 \to 21249 \to 13281 \to 8301 \to 10377 \to 3243 \to 8109 \to 10137 \to \underline{99 \to 249 \to 39} \to \underline{99 \to 249 \to 39} \to \underline{99 \to 249 \to 39} \ldots$
となる。このように，列の途中からでも，以後部分列 $\{99 \to 249 \to 39\}$ が無限に繰返されることを，ループすると言うことにする。

4 実験結果

実験で使用した計算機は，立正大学地球環境科学部コンピュータ室の 66 台及び環境情報数学実験室の 3 台で，仕様は OS:Windows XP Professional, CPU:Pentium 4 (1.7GHz), Memory: 512Mb である。また，使用したプログラム言語は整数論用言語 UBASIC [1]，実験範囲は p を 5 から 135 までの奇数とし，初期値 x はそれぞれ 10^{10} までである。ただし，$p=5$ は 10^9 までとした。また，計算機実験で要した時間は総合計で 56722 時間である。実験結果及び簡単な考察から分かったことを，p-Collatz 列の振舞いごとに分けて次に示す。

4.1 1 に辿り着く場合

結果 1　$p>3$ で Collatz 問題と同様の予想はどの p に対しても否定的と類推される。

結果 2　1 に辿り着く p-Collatz 列を有する p は無限個存在している。

まず，すぐに 1 に辿り着く場合を考えてみる。

<u>その 1 ° x が奇数から 1 に辿り着く場合</u>

$$\frac{px+(p-2)}{2}=1$$

この式を変形すると，

$$p\,(x+1)=4$$

となる。この時 p は奇数であり，更に $p \geqq 3$ より，この式は成立しない。

<u>その 2 ° x が偶数から 1 に辿り着く場合</u>

$$\frac{x}{2}=1$$

この式より，$x = 2$ となる。これを一般化すると，つまり

$$x = 2^m \quad (m \geqq 1)$$

のとき，1 に辿り着くことが言える。

次に，x が奇数から始まり，1 に辿り着く場合を考えてみる。

これは,

$$\frac{px + (p-2)}{2} = 2^m \quad (m \geqq 1)$$

となれば良い。この時，$x = 1$ とすると,

$$p = 2^m + 1 \quad (m \geqq 1)$$

となる。これは，p-Collatz 問題の場合，$x = 1$ から始まって p-Collatz 操作を何度か繰返すと，必ず 1 に辿り着くと言える式である。また，この p は無限個存在する。

では，例を挙げて具体的に説明する。

$p = 33\,(= 2^5 + 1)$ のとき,

$$\frac{33x + (33-2)}{2}$$

となり，$x = 1$ より 32 となる。これを繰返し計算してゆくと，1 に辿り着く。

$$32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

結果 3　2 が p の原始根であれば，必ず 1 に辿り着く x が存在する。

2 を原始根に持つ $p = 13$ の場合を例にとって考えてゆく。

前に述べたように，x が奇数のとき，$f_p(x) = 1$ となるような x は存在しない。x が奇数のとき 1 となるためには，$f_p(x) = 2^m$ となれば良い。よって,

$$f_p(x) = \frac{13x + (13-2)}{2} = 2^m$$

となる。$13x + 11 = 2^{m+1}$ を mod13 で考えると，$13 \equiv 0$ より，$13x \equiv 0$ であり，$11 \equiv 2^{m+1}$。また，$11 \equiv -2$ より $2\,(2^m + 1) \equiv 0$ である。ここに 13 は素数であることから $2 \not\equiv 0$ より，$2^m + 1 \equiv 0$ である。つまり，$2^m \equiv -1 \pmod{13}$

ここで，m に 1 から順に値を代入してゆくと,

$$\begin{array}{lll}
2^1 \equiv 2 & 2^{13} \equiv 2 & 2^{25} \equiv 2 \\
2^2 \equiv 4 & 2^{14} \equiv 4 & 2^{26} \equiv 4 \\
2^3 \equiv 8 & 2^{15} \equiv 8 & 2^{27} \equiv 8 \\
2^4 \equiv 3 & 2^{16} \equiv 3 & 2^{28} \equiv 3 \\
2^5 \equiv 6 & 2^{17} \equiv 6 & 2^{29} \equiv 6 \\
2^6 \equiv -1 & 2^{18} \equiv -1 & 2^{30} \equiv -1 \\
2^7 \equiv -2 & \vdots & \vdots \\
2^8 \equiv -4 & & \\
2^9 \equiv 5 & & \\
2^{10} \equiv -3 & & \\
2^{11} \equiv -6 & & \\
2^{12} \equiv 1 & &
\end{array}$$

となる。

以上より，$m \equiv 6 \pmod{12}$ であれば，$2^m \equiv -1 \pmod{13}$ が言える。

このとき x は,

$$\frac{13x + (13-2)}{2} = 2^m$$

より,

$$x = \frac{2^{m+1} - 11}{13}$$

となる。これは，$p = 13$ の場合，このよう x であれば必ず 1 に辿り着くことを示す。故に，1 に辿り着く x は無限個存在する。

では，これを一般化したものを考えてみる。それは,

$$f_p(x) = \frac{px + (p-2)}{2} = 2^m$$

のときを考えれば良いことになる。そこで,

$$px + (p-2) = 2^{m+1}$$

を $\bmod p$ で考えると,

$$2^m + 1 \equiv 0$$

となる。つまり，$2^m \equiv -1$ が成立するような m を見つければ良い。これは,

$$2^{2m} \equiv 1 \qquad \text{あるいは，} \qquad 2^{\varphi\,(p)} \equiv 1 \pmod{p}$$

と表すことができる。（ただし，φ は Euler 関数とする。）これより，$2m$ は $\varphi\,(p)$ の約数となれば良いことが分かる。よって，2 が p の原始根であれば，必ず 1 に辿り着くことが言える。

例えば，このような条件の p としては，$\{3, 5, 9, 11, 13, 19, 25, 27, 29, 37, \ldots\}$ がある。

4.2　ループ列に入る場合

結果 4　すぐにループしてしまう，また途中からループ列に入る p-Collatz 列をもつ p は 18 個。その中でいくつかの p については，数種類のループ列を有する。ただし，一般に有限種類のループ列であるか否かは不明である。

ループ列に入る p とそのループの種類については表 1 に示す。更に，それぞれの p に対するループ列の様子を分かりやすくするため，その中のいくつかのループ図も示す。但し，$\{1 \to 1\}$ のループは除く。

ループする p とは，どういったものなのか考えてみる。

ここで，$p = 2^m - 1$ $(m \geqq 2)$ のとき，$x = p - 2$ とする。

すると $f_p(x)$ は

$$\begin{aligned} f_p(p-2) &= \frac{p\,(p-2) + (p-2)}{2} \\ &= \frac{(p-2)(p+1)}{2} \end{aligned}$$

となり，$p = 2^m - 1$ より，

$$\begin{aligned} f_p(p-2) &= \frac{(p-2) \cdot 2^m}{2} \\ &= (p-2) \cdot 2^{m-1} \end{aligned}$$

となる。更に p-Collatz 関数を用いて計算を繰返し行ってゆくと，

$$(p-2) \cdot 2^{m-1} \to (p-2) \cdot 2^{m-2} \to \ldots \to (p-2)$$

となる。これより，

$$(p-2) \to \ldots \to (p-2)$$

というループを持つことが分かる。

では，ある例を取って具体的に説明しよう。

$p = 31, x = 29$ のとき，

$$\begin{aligned} f_p(29) &= \frac{31 \cdot 29 + (31-2)}{2} \\ &= \frac{29 \cdot 32}{2} \\ &= 29 \cdot 16 \end{aligned}$$

となり，更に計算を行ってゆくと，

$$29 \cdot 16 \to 29 \cdot 8 \to 29 \cdot 4 \to 29 \cdot 2 \to 29 \cdot 1 \to 29$$

となる。これは，つまり $\{29 \to \ldots \to 29\}$ のループであることを示している。

次に，$p = 2^m - 1$ $(m \geqq 2)$ のとき，$x = p^2 - 4$ とすると，

$$\begin{aligned} f_p(p^2-4) &= \frac{p\,(p^2-4) + (p-2)}{2} \\ &= \frac{(p-2)(p+1)^2}{2} \end{aligned}$$

となり，$p = 2^m - 1$ より，

$$\begin{aligned} f_p(p^2-4) &= \frac{(p-2) \cdot 2^{2m}}{2} \\ &= (p-2) \cdot 2^{2m-1} \end{aligned}$$

となる。先程と同様に繰返し計算を行ってゆくと，

$$(p-2) \cdot 2^{2m-1} \to (p-2) \cdot 2^{2m-2} \to \ldots \to (p-2)$$

となる。これより，

$$(p^2-4) \to \ldots \to (p-2) \to \ldots \to (p-2)$$

というループを持つことが分かる。

以上より，$p = 2^m - 1$ $(m \geqq 2)$ のとき，

$$x \xrightarrow{f_p} (p-2)(p+1)^n$$

となれば，$x \longrightarrow \ldots \to (p-2) \to \ldots \to (p-2)$ となって，ループに入ってゆくことが分かる。このような x を解いてみると，

$$\begin{aligned} px + (p-2) &= 2\,(p-2)(p+1)^n \\ px &= (p-2)(2\,(p+1)^n - 1) \end{aligned}$$

より，p に対して，

$$x = (p-2)\Big(\frac{2\,(p+1)^n - 1}{p}\Big)$$

であれば良いことが分かる。

4.3　発散する場合

結果 5　実験結果という根拠しかないが，p が大きくなるにつれて発散する p-Collatz 列が多くなると類推される。

5 今後の課題

以上の実験結果からは，Collatz 問題解明の糸口を見つけ出すことはできなかった。しかし，p-Collatz 問題からは幾つかの結果が得られた。今後当面の課題としては,

- $p > 135$ ，あるいは $x > 10^{10}$ の計算機実験
- p-Collatz 問題において発散するような具体的な数列の発見

が挙げられる。

参考文献

[1] 木田祐司，UBASIC86[第 8.7 版] ユーザーズ・マニュアル，日本評論社，1994.

[2] Yamashita M., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental proreties, Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Maht. Soc. of Japan, 1995.9.

[3] Yamashita M., Tomonaga S., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental proreties(2), Proceedings of Annual meeting(App. Math.), Maht. Soc. of Japan, 1996.4.

[4] 山下倫範，(e,k) から眺める $3x+1$ 問題，パソコンリテラシ，第 27 巻第 10 号，pp22-pp27，2002 年 10 月.

[5] Lagarias, J. C., $3x+1$ Problem Annotated Bibliography, (unpublished), (July 26, 1998 version).

[6] 大平麗子ー山下倫範，p-Collatz 問題について，第 21 回パソコン利用技術研究発表会講演論文集,(社) パソコンユーザ利用技術協会，pp.61-64

著者略歴

大平麗子

立正大学　地球環境科学部　環境情報数学研究室・共同研究員

山下倫範

立正大学　地球環境科学部　環境情報数学研究室・教授

表 1: ループの種類と周期

p	x (min)	周期長	具体的周期
5	1	1	$1 \to 1$
5	39	3	$39 \to 99 \to 249 \to 39$
5	3	2	$3 \to 9 \to 3$
5	43	3	$43 \to 109 \to 137 \to 43$
5	61	3	$61 \to 77 \to 97 \to 61$
5	53	3	$53 \to 67 \to 169 \to 53$
5	51	3	$51 \to 129 \to 81 \to 51$
7	27	11	$27 \to 97 \to 171 \to 601 \to 1053 \to 461 \to 101 \to 89 \to 157 \to 69 \to 61 \to 27$
7	3	2	$3 \to 13 \to 3$
7	5	1	$5 \to 5$
9	1	1	$1 \to 1$
15	13	1	$13 \to 13$
17	1	1	$1 \to 1$
25	33	3	$33 \to 53 \to 337 \to 33$
27	5	1	$5 \to 5$
29	9	1	$9 \to 9$
29	3	3	$3 \to 57 \to 105 \to 3$
31	29	1	$29 \to 29$
33	1	1	$1 \to 1$
63	61	1	$61 \to 61$
65	1	1	$1 \to 1$
107	5	1	$5 \to 5$
119	13	1	$13 \to 13$
121	17	1	$17 \to 17$
125	41	1	$41 \to 41$
127	125	1	$125 \to 125$
129	1	1	$1 \to 1$

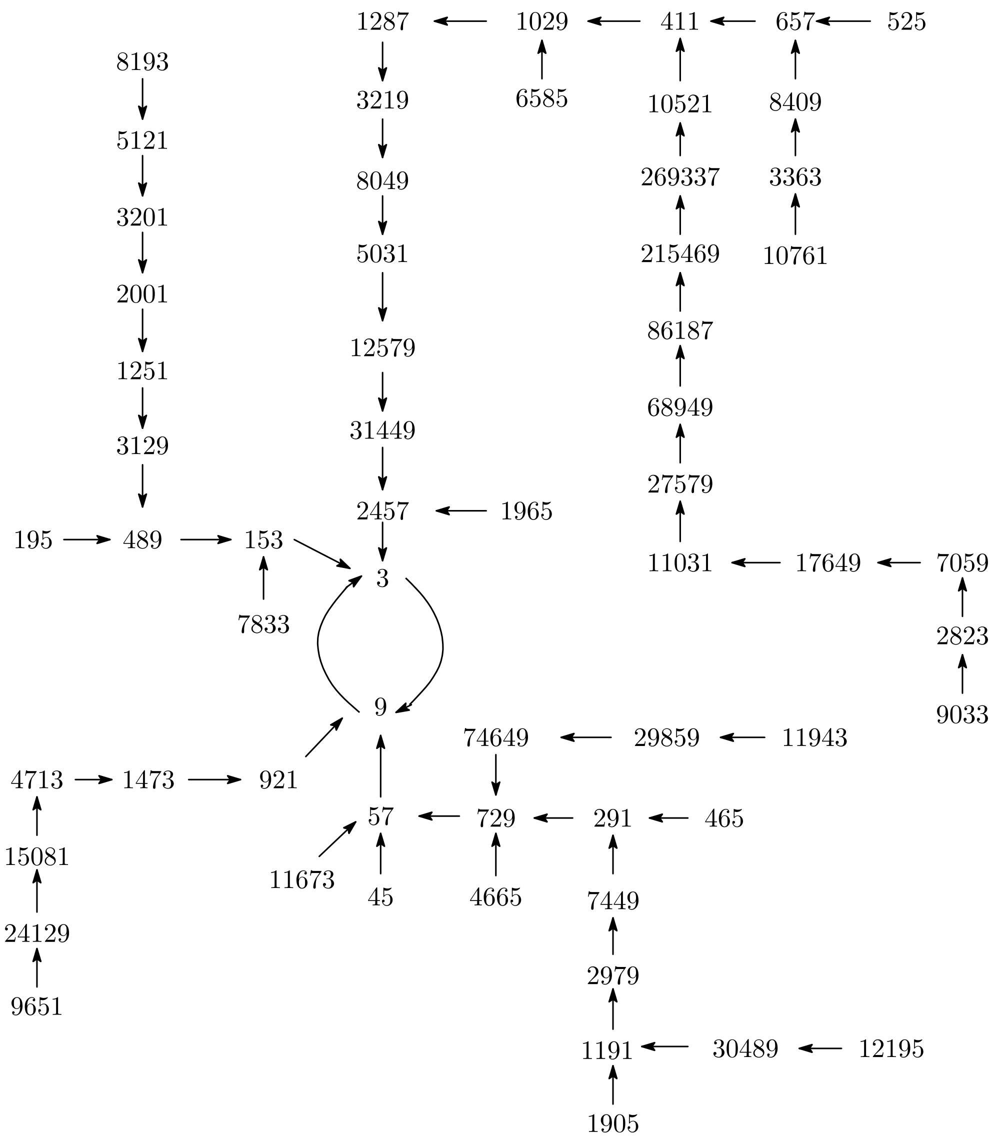

図 1: $p = 5$ での，あるループ例

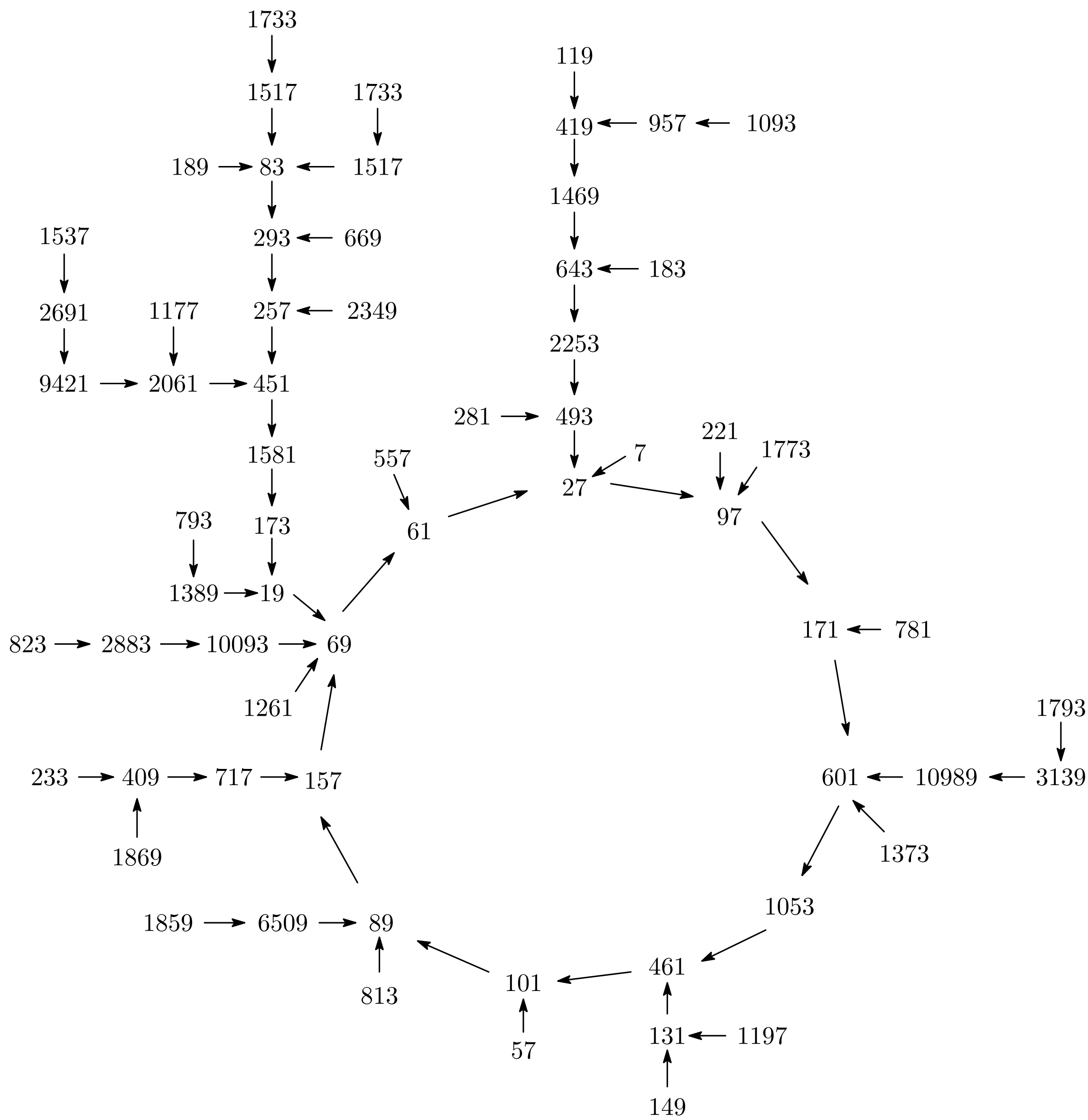

図 2: $p = 7$ での，あるループ例

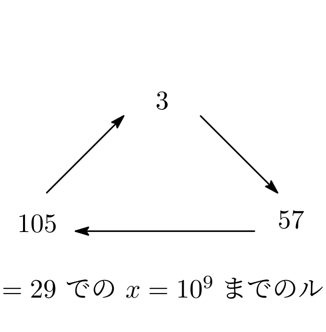

図 3: $p = 29$ での $x = 10^9$ までのループ

$$
\begin{tikzcd}
 & 1040125 \arrow[d] & \\
133136125 \arrow[r] & 16125 \arrow[d] & 8125 \arrow[l] \\
2064125 \arrow[r] & 125 \arrow[loop below] & 264208125 \arrow[l] \\
 & & 66572125 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

図 4: $p = 127$ での $x = 10^9$ までのループ