Note on derived logarithmic functions of Euler's functions

MIYATA Daisuke[1], YAMASHITA Michinori[2]
[1]Faculty of Commerce and Economics, Chiba Univ. of Commerce
[2]Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho Univ.*

1 はじめに

Euler 関数 $\varphi(x)$ について，$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{(n-1)}(x)), \varphi^0(x) = x$ と記することにすれば，自然数 $x > 1$ について，$x > \varphi(x)$ であることから，φ を有限回作用させることにより，任意の自然数 x に対して，ある非負整数 m が存在して，$\varphi^m(x) = 1$ となる。この x に対しての m の考察はすでに Pillai（[1], [2]）によってなされており，その 14 年後 Shapiro （[3]）によって m に関する関係式や m についての評価等が報告されている（ただし，Pillai の仕事については知らなかったと思われる）。さらに 17 年後，Murányi （[4]）によって，同様の内容が研究されている。山下もまた 1971 年（山下が高校在学中）に独立に上記とは違う形で完全対数的関係式を得ていた。このノートでは Shapiro や Murányi の示した（完全対数的ではない）関係式を再定義することによって（[5], [6]），更に見とおしよく扱いやすくなることを注意し，宮田の協力を得てこれが Euler 関数独自の性質ではないことにも言及する（[8], [9]）。

2 定義

定義 2.1. （[3]）
関数 $C(x)$ を x に対して，$\varphi^n(x) = 2$ となる最小の整数 n とし，このとき $C(x) = n$ と記す。ただし，$x = 1, 2$ に対しては $C(1) = C(2) = 0$ と定義する。

定義 2.2. （[5]）
関数 $L(x)$ を偶数 x に対して，$\varphi^n(x) = 1$ となる最小の整数 n とし，奇数 $x > 1$ に対して $L(x)$ を $L(\varphi(x))$ とする。$x = 1$ については $L(1) = 0$ と定義する。

定義 2.3. （[8]）
数論的な関数 $f(x)$ に対して，f による拡張 Euler 関数 $\varphi_f(x)$ を次のように定義する。

$$\varphi_f(x) = x \prod_{i=1}^{r} \frac{f(p_i)}{p_i}$$

ただし，x は $x = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ の素因数分解を有するものとする。

*宮田大輔 miyata@cuc.ac.jp 千葉商科大学商経学部, 山下倫範 yamasita@ris.ac.jp 立正大学地球環境科学部

3 Euler 関数 $\varphi(x)$ の導来対数的関数

定理 3.1. （Shapiro，Murányi[3], [4], [7]）
x もしくは y が奇数であれば

$$C(xy) = Cx) + C(y)$$

x および y が偶数であれば

$$C(xy) = C(x) + C(y) + 1$$

1983 年現在（[7]）でも上記のような記述しかされていなかったが，この結果は定義 2.2 を採用することによって，次の結果のように完全対数的関数となり，証明も大幅に簡素化される。

定理 3.2. （Yamashita[5], [6]，1971）
任意の自然数 x, y に対して，L は完全対数的である。すなはち，

$$L(xy) = Lx) + L(y)$$

これより以下の命題が簡単に従う。

命題 3.3. （Yamashita[5], [6]）
$L(x)$ は次の不等式を満たす。

(1) $L(x) = m$ であれば，$3^m \geqq x \geqq 2^m$ 　である

(2) 特に，

$$\frac{\ln x}{\ln 2} \geqq L(x) \geqq \frac{\ln x}{\ln 3}$$

命題 3.4. （Shapiro，Murányi[3], [4]）
$\varphi(x)$ の x での簡便評価

(1) x が偶数であれば，

$$\varphi(x) \geqq 2^{L(x)} \geqq 2^{\ln x/\ln 3} = x^{\ln 2/\ln 3}$$

(2) x が奇数であれば，

$$\varphi(x) \geqq 2^{L(x)+1} \geqq 2^{(\ln x/\ln 3)+1} = 2x^{\ln 2/\ln 3}$$

定理 3.2 の拡張形として，次の結果が得られる。

定理 3.5. （Miyata, Yamashita[8]）
P を素数の集合，N を自然数の集合とし，関数 $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{N}$ は $p > f(p) \geqq 1$ を満たすものとする。このとき，f による拡張 Euler 関数 $\varphi_f(x)$ について，関数 L を以下のように定義する。

$$L(x) = \begin{cases} 0 & (x = 1) \\ L(\varphi_f(x)) + \#\{p \in f^{-1}(1) : p|x\} & (x \neq 1) \end{cases}$$

このとき，任意の自然数 x, y に対して，次の関係式が成立する。

$$L(xy) = Lx) + L(y)$$

参考文献

[1] Pillai, Subbayya Sivasankaranarayana S., On some functions connected with $\phi(n)$, Bull. Amer. Soc. 35 (1929), 832–836

[2] Pillai, Sivasankaranarayana S., On a function connected with $\phi(n)$, Bull. Amer. Soc. 35 (1929), 837–841

[3] Shapiro, H., An arithmetic function arising from the ϕ function, Amer. Math. Monthly 50 (1943), 18–30

[4] Murányi, Aladár, Az Euler-félé ϕ -függvény iterálásával nyert számelméleti függvényröl, Mat. Lapok 11 (1960), 47–67

[5] Yamashita, M. $\rightarrow$ Uchiyama, S. : On a derived logarithmic function of an Euler's function, 1977.9.10, (private communication, Uchiyama, S.=Uchiyama, Saburo [Univ. of Tsukuba])

[6] Uchiyama, S. $\rightarrow$ Yamashita, M. : Re:On a derived logarithmic function of an Euler's function, 1977.9.12, (private communication)

[7] Shapiro, Harold N., Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York et al.,(1983) [3. Arithmetic Functions §3.7 The Euler Function. Exrcise $\sharp$ 17 (p.77–78)]

[8] Miyata, D., Yamashita, M. : A generalization of Yamashita's note on derived logarithmic functions of Euler's functions, 2001.12.14, (unpublished)

[9] Miyata, D., Yamasita, M. :Note on derived logarithmic functions of Euler's functions, Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Math. Soc. of Japan, 2004.9, (in Japanese)