ユークリッド環についての注意
Note on Euclidean rings

山下　倫範
YAMASHITA Michinori

整域 R から整列集合 I の中への写像 ρ が次の 2 条件を満たすように存在するとき，R はユークリッド整域（Euclidean domain）と呼ばれる。

(1) $0 \neq a \in R$ であれば，$\rho(0) < \rho(a)$

(2) $0 \neq a \in R,\ b \in R$ であれば，$\exists q,\ \exists r \in R \qquad b = ar + r,\ \rho(r) < \rho(a)$

ところが，上の他に

(3) $0 \neq b = ac$ であれば，$\rho(a) \leqq \rho(b)$

(4) $I \cong$ (自然数集合)

という条件を合わせてなされている場合が多い。永田雅宜先生は 1977 年 4 月の日本数学会年会（於：京都大学）・代数分科会において，

(3) は写像に対する制限にはなるが，環への制限にはならぬこと

(4) は環への制限に本当になること

を注意し，整域（domain）も不要である ことを述べている。

我々も次の注意を付言しておきたい（[1], 54-55p）。

K を体，X を不定元，$\mathbb{Q}^+$ で正の有理数全体として，環 $K[\mathrm{X}^{\mathbb{Q}^+}] = \{\ \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{X}^{\alpha_1} + \mathrm{a}_2\mathrm{X}^{\alpha_2} + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{X}^{\alpha_n} \mid \mathrm{a}_\mathrm{j} \in K,\quad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \quad \alpha_\mathrm{j} \in \mathbb{Q}^+\ \}$ を考えれば，ρ としては，多項式環 $K[\mathrm{X}]$ で考える次数（deg）と同様のものに決めておけば，I の部分は $\mathbb{Q}^+$ で置換えられ整列集合ではない。いささか病的な例で，通常考えられる有限回終了のユークリッドアルゴリズムではない。また，$X = X^{1/2} \cdot X^{1/2} = X^{1/3} \cdot X^{2/3}$ とか $X - 1 = (X^{1/2} - 1)(X^{1/2} + 1) = (X^{1/3} - 1)(X^{2/3} + X^{1/3} + 1)$ のように UFD（Unique Factorization Domain：一意素元分解整域）とはならない。

参考文献

[1] 山下倫範述ー香西雅人記，初等可換環論（その１），セミナーノート，80p，(1977.2.14-2.18), 1977.9.22