$3x \pm 1$問題についての注意
Note on the $3x \pm 1$ problem

山下倫範*
YAMASHITA Michinori
立正大学　地球環境科学部
Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho Univ.

表題の問題を扱う上で注意しておくべき点を列挙してゆくことを始める。（2008 年 2 月 3 日朝）

次の注意から始めよう（[1]，[2]，[3]，[4] ）。

まず，f を $3x+1$ 型の関数，g を $3x-1$ 型の関数とし，整数全体でそれぞれの関数の振舞いを考察するということについては，正の整数に対しての f の振舞う風景と負の整数に対して g が振舞う風景は同じであり，f，g を逆にしても同じである。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} & x \text{ is odd} \\[2ex] \dfrac{x}{2} & x \text{ is even} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} & x \text{ is odd} \\[2ex] \dfrac{x}{2} & x \text{ is even} \end{cases}$$

次に，$(e,\ k) = 2^e k - 1$，$[e,\ k] = 2^e k + 1$（ただし，e は 0 以上の整数，k は奇数）とし，
前者の場合 $(e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 4)$，$(e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv 3 \pmod 4)$ を基本型，
後者の場合 $[e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 4]$，$[e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv 3 \pmod 4]$ を基本型と呼ぼう。

簡単にわかることであるが，整数全体で考えたときには $(*,\ *)$ と $[*,*]$ の間には次の関係があり記法的にはどちらかで統一できるが，わかりやすくするため別々に定める。

$$(e,\ -k) = -[e,\ k],\ [e,\ -k] = -(e,\ k)$$

また ℓx で x が 1 にたどり着く最小回数としておくと，ℓx が有限もしくは 1 を含む有限ループに入るときは，つまり，$(e,\ k)$ や $[e,\ k]$ の近傍では以下のことが成立している。

命題 0

1 ° $e > 0$ であれば，$3(e,\ k) = (1, (e-1,\ 3k))$，さらに $e > 2$ であれば，$\ell 3(e,\ k) = \ell(e-1,\ k)+1$

2 ° $e > 0$ であれば，$3[e,\ k] = [1, [e-1,\ 3k]]$，さらに $e > 2$ であれば，$\ell 3[e,\ k] = \ell[e-1,\ k]+1$

3 ° $e > 1$ であれば $\ell(1,\ (e,\ k)) = \ell(e-1,\ k)+2$

4 ° $e > 1$ であれば $\ell[1,\ [e,\ k]] = \ell[e-1,\ k]+2$

5 ° $(e,\ k)$ が基本型であれば，$\ell(e+1,\ k) = \ell(e,\ k)+1$

*yamasita@ris.ac.jp

6 ° $[e,\ k]$ が基本型であれば，$\ell[e+1,\ k] = \ell[e,\ k] + 1$

7 ° $e > 2$ であれば，$\ell 5(e,\ k) = \ell 5(e-3,\ 3^2 k) + 3$

8 ° $e > 2$ であれば，$\ell 5[e,\ k] = \ell 5[e-3,\ 3^2 k] + 3$

ℓ を使用するより，いずれ2つの数 $x,\ y$ がある数で出会うということを $x \sim y$ と表記することにすれば，上記の関係も＋ α の形で，

命題 1

1 ° $e > 2$ であれば，$3(e,\ k) \sim (e-1,\ k)$

2 ° $e > 2$ であれば，$3[e,\ k] \sim [e-1,\ k]$

3 ° $e > 1$ であれば $(1,\ (e,\ k)) \sim (e-1,\ k)$

4 ° $e > 1$ であれば $[1,\ [e,\ k]] \sim [e-1,\ k]$

5 ° $(e,\ k)$ が基本型であれば，$(e+1,\ k) \sim (e,\ k)$

6 ° $[e,\ k]$ が基本型であれば，$[e+1,\ k] \sim [e,\ k]$

7 ° $3^e k = (e',\ k')$ であれば，$(e,\ k) \sim (e'-1, k')$

8 ° $3^e k = [e',\ k']$ であれば，$[e,\ k] \sim [e'-1, k']$

9 ° $e > 2$ であれば，$5(e,\ k) \sim 5(e-3,\ 3^2 k)$

10 ° $e > 2$ であれば，$5[e,\ k] \sim 5[e-3,\ 3^2 k]$

などが得られる。

今，$(e,\ k)$ や $[e,\ k]$ については，便宜的に k が奇数であるとして扱ってきたが，特に偶数であっても，$(e,\ 2^{e'} k) = (e+e',\ k)$，$[e, 2^{e'} k] = [e+e',\ k]$ であるので，扱う時点で注意を払っておきさえすれば，一般的に k の偶奇にこだわる必要はない。

奇数 $(e,\ k)$，$[e,\ k]$（k は奇数）については，f，g でそれぞれ次のように変化してゆき，e 回目の繰り返しで初めて各偶数 $3^e k - 1$，$3^e k + 1$ となる。

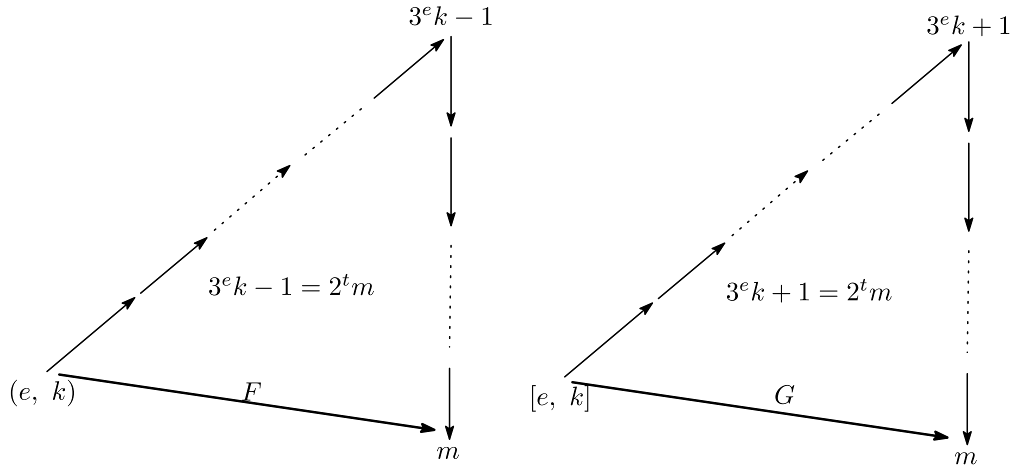
$$f : (e,\ k) \longrightarrow (e-1,\ 3k) \longrightarrow (e-2,\ 3^2 k) \longrightarrow \cdots \quad \cdots \longrightarrow (0,\ 3^e k)$$

$$g : [e,\ k] \longrightarrow [e-1,\ 3k] \longrightarrow [e-2,\ 3^2 k] \longrightarrow \cdots \quad \cdots \longrightarrow [0,\ 3^e k]$$

偶数 $(0,\ k)$，$[0,\ k]$（k は奇数）については，次列の繰り返しで，各 $(0,\ *)$，$[0,\ *]$ での $*$ が偶数になって時点で奇数に落ち着く。奇数に落ち着けば，上記の奇数列が再び続いてゆく。

$$f : (0,\ k) \longrightarrow \left(\ 0,\ \frac{k+1}{2}\ \right) \longrightarrow \cdots \qquad\qquad g : [0,\ k] \longrightarrow \left[\ 0,\ \frac{k-1}{2}\ \right] \longrightarrow \cdots$$

奇数 $(e,\ k)$，$[e,\ k]$ は e 回目の繰り返しで初めて偶数 $3^e k - 1$，$3^e k + 1$ となるが，この $3^e k - 1$ や $3^e k + 1$ が次の繰り返し t 回目で初めて奇数 m となるとき，関数 E^*，K^* を $E^+(e,\ k) = t$，$K^+(e,\ k) = m$ もしくは $E^-[e,\ k] = t$，$K^-[e,\ k] = m$ として定めておこう。



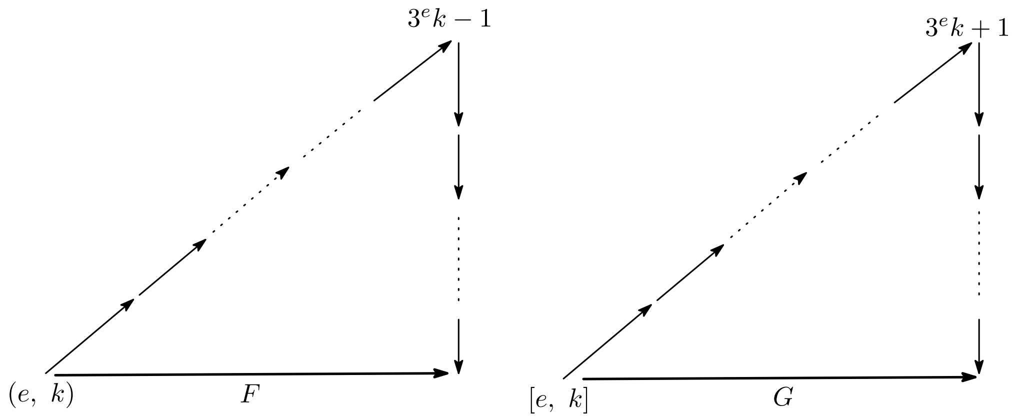
すると，先ほどの命題 1 の 1 °，2 °は e の条件を厳しくした場合，次のように述べることができる。

命題 2

1 ° $3(2,\ k) \sim (E^+(2,\ k),\ K^+(2,\ k))$ であり，$3(1,\ k) = (1+E^+(1,\ k),\ K^+(1,\ k))$ である。

2 ° $3[2,\ k] \sim [E^-[2,\ k],\ K^-[2,\ k]]$ であり，$3[1,\ k] = [1+E^-[1,\ k],\ K^-[1,\ k]]$ である。

上述の m を $(e',\ k')$ もしくは $[e',\ k']$ と記すことにして，関数 $F,\ G$ を $f,\ g$ の繰り返しを縮約した形の $F(e,\ k) = (e',\ k')$，$G[e,\ k] = [e',\ k']$ としておこう。ここで，$F(e,\ k) = (e,\ k)$ や $G[e,\ k] = [e,\ k]$ の場合（これを F もしくは G が周期 1 を有するといおう）を考えてみよう。すると，簡単な計算から次のことがすぐにわかる。



$3^e k-1=2^t(2^e k-1)$ $\qquad$ $3^e k+1=2^t(2^e k+1)$

命題 3 $F,\ G$ ともに正の振舞いの中では，$k=1$ であれば，F については $(e,\ k)=(1,\ 1)$ の場合，G については $[e,\ k]=[(2,\ 1]$ の場合を除いて周期 1 をもたない。

∵ 最初に F の場合であるが，周期 1 であるということは，

$$3^e k-1=2^t(2^e k-1) \tag{1}$$

が，$(e,\ k)=(1,\ 1)$ 以外に自然数解をもつということである。

$e=1$ であれば，$k=1$ であることは自明なので，$e\neq 1$ としよう。

$$3^e-1=2^t(2^e-1) \tag{2}$$

変形して，

$$2^{t+e}=3^e+(2^t-1) \tag{3}$$

ここに，上記 (3) から t が偶数であると，$3|2^t-1$ すなわち 2^t-1 は 3 の倍数であるので，$3|2^{t+e}$ となり，矛盾を引き起こし t は奇数でなければばならない。

次に (2) を次のように変形すると

$$2^{t+e}-2(2^{t-1}+1)=3(3^{e-1}-1) \tag{4}$$

$2||$（左辺）であるので，$2||3^{e-1}-1$ より $e-1$ は 0 もしくは奇数であるが，$e\neq 1$ としたので e は偶数であることが必要である。

一方 (2) を次のように変形すると

$$2^{t+e}-1=3^e+2(2^{t-1}-1) \tag{5}$$

t が奇数であることから，$3|2^{t-1}-1$ であるので，$3|$（左辺）$=2^{t+e}-1$ となって，$t+e$ は偶数である。しかるに，t が奇数，e は偶数という先ほどの結果から矛盾を起こす。$\therefore\quad k=1$ の場合は成立しない。

次に G の場合

$t=1$ のときは，$[e,\ k]=[2,\ 1]$ で解を持つので，$t\neq 1$ としておく。

$$3^e+1=2^t(2^e+1) \tag{6}$$

整理して，

$$2^{t+e}=3^e-(2^t-1) \tag{7}$$

t が偶数とすれば，$3|2^t-1$ で矛盾を生じるので t は奇数である。

また，(6) は

$$2^{t+e}+2(2^{t-1}+1)=3(3^{e-1}+1) \tag{8}$$

と変形され，$2||3^{e-1}+1$ より，$e-1$ は偶数となり e が奇数であることが示される。同様に，

$$2^{t+e}+1=3^e-2(2^{t-1}-1) \tag{9}$$

と変形すると，t が奇数であることから $3|2^{t-1}-1$ であるので，$3|$（左辺）$=2^{t+e}+1$ より $t+e$ は奇数である。これは，t も e も奇数であることに矛盾する。（証明終）

もう少し，詳しく見てみよう。その前に $\mathrm{m}_k(a)$ で $a^s\equiv 1 \pmod{k}$ を満足する最小の自然数 s であるとする。

補題 1　$3\nmid k$ であれば，F，G のいずれの場合でも，t は奇数である。（このことから，周期 1 の

場合は t は 3 以上の奇数と仮定して考察してよい）

$\because$　F の場合は（1）を変形すると

$$3^e k + (2^t - 1) = 2^{t+e} k \tag{10}$$

G の場合も同様に考えて，

$$3^e k = 2^{t+e} k + (2^t - 1) \tag{11}$$

となり，t が偶数であれば $3|2^t - 1$ となり，$3|2^{t+e}$ を導き矛盾。よって t は奇数でなければならない。

命題 4　$3 \not| k$ のとき，$\mathrm{m}_k(2)$ が偶数であれば，F，G ともに周期 1 をもたない。

$\because$　F，G の関係式を mod k で，眺めればともに $2^t \equiv 1 \pmod{k}$ である。ここに命題の条件から $2|t$ であるが，補題 1 より矛盾を引き起こす。（証明終）

$k = 5$ のときは，$\mathrm{m}_5(2) = 4$ であるので，成立している。$k = 7$ のときは，$\mathrm{m}_7(2) = 3$ であるので，この場合は命題 4 の条件には合致していない。因みに 100 までの $3 \not| k$ なる奇数 $k \geqq 11$ については，$\mathrm{m}_k(2)$ の値は次のようになっている。

k	11	13	17	19	23	25	29	31	35	37	41	43	47	49	53
$\mathrm{m}_k(2)$	10	12	8	18	11	20	28	5	12	36	20	14	23	21	52
k	55	59	61	65	67	71	73	77	79	83	85	89	91	95	97
$\mathrm{m}_k(2)$	20	58	60	12	66	35	9	30	39	82	8	11	12	36	48

また，次の命題は命題 4 の条件を支持する。

命題 5　k を $\mathrm{m}_k(2)$ が偶数となるような数とすれば，k の倍数 n についても $\mathrm{m}_n(2)$ は偶数となる。

$\because$　仮に，奇数 s によって $2^s - 1 \equiv 1 \bmod n$ であるとすれば，$2^s - 1 \equiv 1 \bmod k$ も成立している。ところで $\mathrm{m}_k(2)$ は偶数であるので，s は偶数であることが必要である。これは矛盾を導く。（証明終）

ところで，先ほどの $k = 7$ の場合は次のように解決できる。

命題 6　$k = 7$ のとき，F,G ともに周期 1 をもたない。

$\because$　F の場合：$3^e 7 - 1 = 2^t(2^e 7 - 1)$ の関係式であるが，mod 8 で考えれば，

$$3^e(-1) - 1 \equiv 2^t(2^e(-1) - 1) \tag{12}$$

整理して，

$$3^e + 1 \equiv 2^t(2^e + 1) \tag{13}$$

となるが，補題 1 より t は 3 以上の奇数と考えてよいことから，右辺 $\equiv 0$ である。一方，左辺は e の如何に関わらず $3^e+1\equiv 2$ もしくは 4 であるので矛盾を引き起こす。

G の場合：$3^e7+1 = 2^t(2^e7+1)$ の関係式であるが，先ずわかることは，e が奇数であれば，$2||3^e7+1$ なので，補題 1 の $t \geqq 3$ を採用すれば，t は偶数でなければならない。ここで，関係式を mod5 で考えると

$$3^e2+1\equiv 2^t(2^{e+1}+1) \tag{14}$$

である。ここで，左辺と右辺の右側の差を考えると，e が偶数であることから

$$3^e2+1-(2^{e+1}+1)\equiv 2(3^e-2^e)\equiv 2(3^e-(-3)^e)\equiv 2(3^e-3^e)\equiv 0 \tag{15}$$

これは $3^e2-1\not\equiv 0$ であることより $2^t\equiv 1$ を意味するが，一方補題 1 より t が奇数であることから $2^t\equiv 2$ もしくは 3 であるので矛盾を引き起こす。（証明終）

次の命題を用意しておけば，命題 6 の証明は簡単になる。

命題 7　F，G がそれぞれ周期 1 を有していれば，それぞれに次の関係式が成立している。

$$F:(3^e-2^e)k=(2^t-1)(2^ek-1) \qquad G:(3^e-2^e)k=(2^t-1)(2^ek+1) \tag{16}$$

特に，t が奇数，e が偶数であれば，$k\pm 1\equiv 0 \pmod 5$ でなければならない。

参考文献

[1] Yamashita M., Note on the behaviour of $(e,\ k)$, (unpublished), 1982.10.10.

[2] Yamashita M., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties, Proceedding of Autum meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1995.9.

[3] Yamashita M., Tomonga S., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties (2), Proceedding of Annual meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1996.4.

[4] 山下倫範，$(e,\ k)$ から眺める $3x+1$ 問題，パソコンリテラシ，第 27 巻第 10 号,（社）パーソナルコンピュータユーザ利用技術協会，2001.10，pp.22-27

[5] 大平麗子ー山下倫範，$p-$Collatz 問題について，第 21 回パソコン利用技術研究発表会講演論文集,（社）パーソナルコンピュータユーザ利用技術協会，2004.03.13，pp.61-64

[6] 大平麗子ー山下倫範，Collatz 問題の一般化について，パソコンリテラシ，第 31 巻第 4 号,（社）パーソナルコンピュータユーザ利用技術協会，2006.4,pp.16-21