$3x+1$ 問題と $2x+1$ 関数の関係
On a relation between the $3x+1$ problem and the $2x-1$ function

山下倫範 *
YAMASHITA Michinori
立正大学　地球環境科学部
Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho Univ.

Hasse [1] や Heppner [3] が定義した関数 $T_{2,3}(x)$（以下，$H(x)$）と Terras [2] が定義した $3x+1$ 関数 $T(x)$ との接点についての計算メモを記して。（2014 年 5 月 23 日朝）

まず，T を $3x+1$ 型，H を $2x-1$ 型の以下のような関数とする。このノートでは双方とも自然数に対して定義されているものとする。

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} & (x \equiv 1 \pmod 2) \\[2ex] \dfrac{x}{2} & (x \equiv 0 \pmod 2) \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} H_+(x) = \dfrac{2x+1}{3} & (x \equiv 1 \pmod 3) \\[2ex] H_-(x) = \dfrac{2x-1}{3} & (x \equiv -1 \pmod 3) \\[2ex] H_0(x) = \dfrac{x}{3} & (x \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

次に，$(e,\ k)_2 = 2^e k - 1,\ [e,\ k]_2 = 2^e k + 1$（ただし，$e$ は 0 以上の整数，特に断りのない限りは k は奇数であるもとのとする）とし，また，$(e,\ k)_3 = 3^e k - 1,\ [e,\ k]_3 = 3^e k + 1$（ただし，$e$ は 0 以上の整数，k は 1 以上の自然数とする）

- $(e,\ k)_2$ の場合 $(e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 4)_2$ もしくは $(e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv 3 \pmod 4)_2$ であるとき，
- $[e,\ k]_2$ の場合 $[e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 4]_2$ もしくは $[e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv 3 \pmod 4]_2$ であるとき，
- $(e,\ k)_3$ の場合 $(e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 3)_3$ もしくは $(e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv -1 \pmod 3)_3$ であるとき，
- $[(e,\ k]_3$ の場合 $[e \equiv 0 \pmod 2,\ k \equiv 1 \pmod 3]_3$ もしくは $[e \equiv 1 \pmod 2,\ k \equiv -1 \pmod 3]_3$ であるとき，

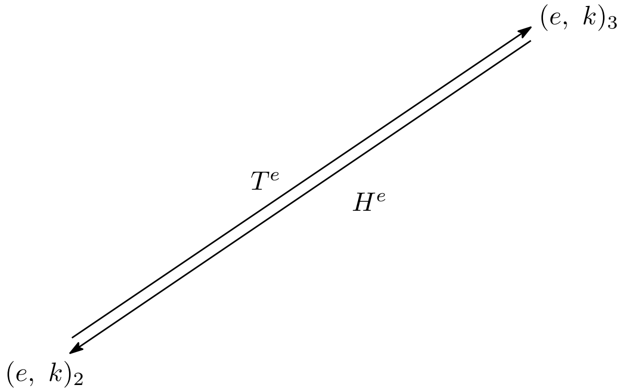
各々を基本型と呼ぶことにする。

関数 f について，自然数 $x,\ x'$ について，ある整数 $e,\ e'$ があって $f^e(x) = f^{e'}(y)$ であるとき，$x \overset{f}{\sim} x'$ と書くことにしよう。

このとき T と H の関係については

*yamasita@ris.ac.jp

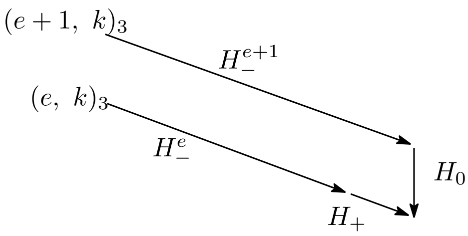
命題　奇数 $x=(e,\ k)_2$ について　$H^eT^e(x)=x$，自然数 $y=(e,\ k)_3$ について　$H^eT^e(y)=y$ である。

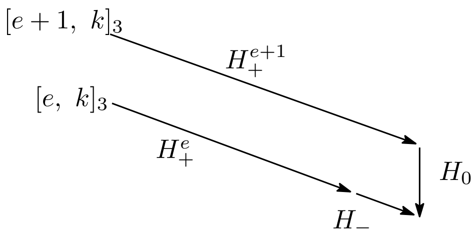


一方，iteration による H の振舞いについて，1 にたどり着くことは自明であるが，T のときと同様 [4][5] に，次の性質をもつ。

命題　$(e,\ k)_3$ が基本型であれば，$(e,\ k)_3 \overset{H}{\sim} (e{+}1,\ k)_3$ である。特に，$H^{e+1}(e,\ k)_3=H_+H_-^e(e,\ k)_3=H^{e+2}(e+1,\ k)_3=H_0H_-^{e+1}(e+1,\ k)_3$ が成り立つ。

命題　$[e,\ k]_3$ が基本型であれば，$[e,\ k]_3 \overset{H}{\sim} [e{+}1,\ k]_3$ である。特に，$H^{e+1}[e,\ k]_3=H_-H_+^e(e,\ k)_3=H^{e+2}[e+1,\ k]_3=H_0H_+^{e+1}[e+1,\ k]_3$ が成り立つ。





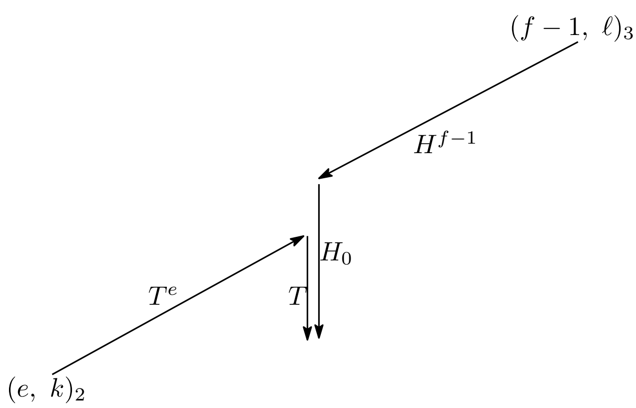
また，T と H の接点では

命題　$(e,\ k)_2$ を基本型とし，$T^{e+1}(e+1,\ k)_2=3^{e+1}k-1=2^f\cdot\ell$（$\ell$ は奇数）であるとすると，次の等式が成立する。

$$\frac{3^ek-1}{2}=\frac{2^{f-1}\ell-1}{3}$$

すなわち，

$$T^{e+1}(e,\ k)_2=H^f(f-1,\ \ell)_3$$



と

命題　$(e,\ k)_2$ が基本型であれば，

$$H^e T^{e+1}(e,\ k)_2 = H_0^{e-1} H_1 T^{e+1}(e,\ k) = k$$

である。

$$\begin{tikzcd}
 & & T^e(e,\ k)_2 \arrow[d] \\
 & & T^{e+1}(e,\ k)_2 \arrow[dl, "H"] \\
(e,\ k)_2 \arrow[uurr] & H_+T^{e+1}(e,\ k)_2 \arrow[d, "H^{e-1}"] & \\
 & k = H_0^{e-1}H_+T^{e+1}(e,\ k)_2 &
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] Helmut Hasse, Unsolved Problems in Elementary Number Theory, Lectures at University of Maine (Orono), Spring 1975, Mimeographed notes.

[2] Riho Terras, A stopping time problem on the positive integers, Acta Arithmetica **30** (1976), 241-252 (MR 58# 27879)

[3] Ernest Heppner, Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse Algorithmus, Achiv. Math. **31** (1978), 317-320 (MR 80d:10007)

[4] Yamashita M., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties, Proceedding of Autum meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1995.9.

[5] Yamashita M., Tomonga S., Nagata K. and Nemenzo F., On some kind of integers and their experimental properties (2), Proceedding of Annual meeting (App. Math.) [abstructs], Math. Soc. of Japan, 1996.4.