$3x \pm 1$問題を扱う上での注意
Remarks on treatments of the $3x \pm 1$ problem

山下倫範
YAMASHITA Michinori

2009 年 7 月 29 日

用語・記法は，[1] − [4] に従うものとする。

1　主命題

基本型 $(e,\ k)$ 並びに $[e,\ k]$ について，それ自身もしくはそれに付随する $(e+1,\ k)$ 並びに $[e+1,\ k]$ は 3 の倍数となる。したがって，

$3x \pm 1$ 問題は，x が 3 の倍数であるときに帰着される。

2　証明

$3x-1$ 問題の場合も，$3x+1$ 問題のときと同様であるので，$3x+1$ 問題の場合を証明する。以下，$x=(e,\ k)$ とする。

$$(e,\ k) = \begin{cases} (e,\ 1 \pmod{12}) \\ (e,\ 3 \pmod{12}) \\ (e,\ 5 \pmod{12}) \\ (e,\ 7 \pmod{12}) \\ (e,\ 9 \pmod{12}) \\ (e,\ 11 \pmod{12}) \end{cases}$$

ここに，$(e,\ k)$ において $k \equiv 3 \pmod{12})$ もしくは $k \equiv 9 \pmod{12})$ の場合は，k が 3 の倍数であるので，$k = 3^t k'$ $(3 \not| k,\ k \equiv 1,\ 5,\ 7,\ 11)$ と分解されることから，他の場合に帰着できる。

また，[1] より

- $e \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$ のとき
  $(e,\ 1) \equiv 0 \pmod 3$，$(e-1,\ 5) \equiv 0 \pmod 3$，$(e,\ 7) \equiv 0 \pmod 3$，$(e+1,\ 11) \equiv 0 \pmod 3$ であるが，$(e,\ 1) \sim (e-1,\ 1)$，$(e,\ 5) \sim (e-1,\ 5)$，$(e+1,\ 7) \sim (e,\ 7)$，$(e,\ 11) \sim (e+1,\ 11)$ であることより，この場合，$(e,\ k)$ については基本型もしくはそれに付随するもののいずれかが 3 の倍数である。
- $e \equiv 1$ のとき
  $(e+1,\ 1) \equiv 0 \pmod 3$，$(e+1,\ 5) \equiv 0 \pmod 3$，$(e-1,\ 7) \equiv 0 \pmod 3$，$(e,\ 11) \equiv 0 \pmod 3$ であるが，$(e+1,\ 1) \sim (e,\ 1)$，$(e,\ 5) \sim (e+1,\ 5)$，$(e-1,\ 7) \sim (e,\ 7)$，$(e,\ 11) \sim (e-1,\ 11)$ であることより，この場合も，$(e,\ k)$ については基本型もしくはそれに付随するもののいずれかが 3 の倍数である。

（証明終）

参考文献

[1] YAMASHITA M., NAGATA K. and NEMENZO F., On some kind of integers and their experimental proreties, Proceedings of Autum meeting(App. Math.), Maht. Soc. of Japan, 1995.9.

[2] YAMASHITA M., TOMONAGA S., NAGATA K. and NEMENZO F., On some kind of integers and their experimental proreties(2), Proceedings of Annual meeting(App. Math.), Maht. Soc. of Japan, 1996.4.

[3] 山下倫範，$(e,\ k)$ から眺める $3x+1$ 問題，パソコンリテラシ，第 27 巻第 10 号, (社) パーソナルコンピュータユーザ利用技術協会，2001.10，pp.22-27

[4] http://www.ris.ac.jp/yamasita/open/col-1.pdf：
山下倫範，$3x \pm 1$ 問題についての注意（Note on the $3x \pm 1$ problem），2008.02.03